
097 7


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



COURS

DE

MÉCANIQUE

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

COURS

DE

MÉCANIQUE

PAR

M. DESPEYROUS

ANCIEN PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

AVEC DES NOTES

PAR

M. G. DARBOUX

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME SECOND

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

1886

COURS
DE
MÉCANIQUE
DE MR DESPEYROUS

DYNAMIQUE
DU POINT MATÉRIEL
(Suite)

CHAPITRE XI

ATTRACTION.

89. Quand on veut expliquer les phénomènes de notre système planétaire, en partant des lois de la gravitation universelle, la première question que l'on rencontre est celle de l'attraction d'un corps céleste tout entier sur un point matériel, en tenant compte de l'attraction de toutes les molécules qui composent ce corps. Le Soleil et les planètes étant à peu près sphériques, nous sommes conduits à nous occuper d'abord de l'attraction d'une sphère sur un point matériel. Nous avons d'ailleurs tout lieu de penser que si les corps célestes ne sont pas homogènes, ils sont formés de couches concentriques homogènes; nous allons

considérer une de ces couches et résoudre le problème suivant :

Calculer l'attraction d'une couche sphérique homogène très mince sur un point extérieur.

Soient r et $r + dr$ les rayons des deux sphères qui limitent la couche, ρ la densité constante de cette couche.

Soient A le point attiré, M un point quelconque de la couche, θ l'angle MOA, ψ l'angle que fait le plan MOA avec un plan fixe mené par OA. Si nous prenons pour élément de volume le parallélipipède dont les côtés sont

$$dr, \quad r d\theta, \quad r \sin\theta \, d\psi,$$

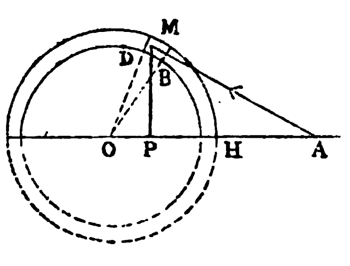


Fig. 174

l'élément de volume de la couche sera :

$$dv = r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$

et l'attraction dirigée suivant MA sera :

$$\frac{\mu f \rho \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\psi}{u^2},$$

μ désignant la masse, du point A, f l'attraction de deux unités de masse placées à l'unité de distance et u la distance MA.

Nous décomposerons l'attraction en deux forces dirigées l'une suivant AO, l'autre suivant une perpendiculaire à AO; cette dernière composante sera détruite par la composante fournie par l'élément symétrique de M, et il restera pour la composante totale dirigée suivant AO :

$$f\mu\rho \, r^2 \, dr \iint \frac{\sin\theta}{u^2} \cos \mathrm{OAM} \, d\theta \, d\psi;$$

or :

$$\cos \mathrm{OAM} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AM}} = \frac{a - r\cos\theta}{u},$$

en désignant la distance OA par a; donc l'attraction A sera donnée par la formule :

$$A = f\mu\rho\, r^2\, dr \iint \frac{a - r\cos\theta}{u^3} \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Comme u ne dépend que de θ, on peut intégrer d'abord par rapport à ψ; on doit le faire entre les limites 0 et 2π; on trouve ainsi :

$$(1) \qquad A = 2\pi\, \mu f\rho\, r^2\, dr \int \frac{a - r\cos\theta}{u^3} \sin\theta\, d\theta.$$

On a d'ailleurs la relation :

$$(2) \qquad u^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta.$$

La deuxième expression de A doit être intégrée depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$. Mais il est plus commode de prendre u pour variable indépendante [1].

De (2) on tire :

$$udu = ar\sin\theta\, d\theta,$$

$$a - r\cos\theta = a - \frac{a^2 + r^2 - u^2}{2a} = \frac{a^2 - r^2 + u^2}{2a},$$

et par conséquent :

$$A = 2\pi\, f\mu\rho\, r^2\, dr \int \frac{a^2 - r^2 + u^2}{2a\, u^3} \times \frac{udu}{ar},$$

$$A = \pi f\mu\rho \frac{rdr}{a^2} \int \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du.$$

Si le point attiré est extérieur à la couche, u doit varier

---

[1] En faisant $\cos\theta = \zeta$, on aura dans tous les cas, que le point soit à l'intérieur ou à l'extérieur :

$$A = 2\pi f\mu\rho\, r^2\, dr \int_{-1}^{+1} \frac{a - r\zeta}{(a^2 + r^2 - 2ar\zeta)^{\frac{3}{2}}}\, d\zeta;$$

pour intégrer, il faut poser :

$$a^2 + r^2 - 2ar\zeta = u^2.$$

On retrouve donc forcément le changement de variable indiqué.

de $a - r$ à $a + r$. Or :

$$\int \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du = u - \frac{a^2 - r^2}{u} + \text{const.};$$

donc :

$$\int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{u^2}\right) du = 4r,$$

et par conséquent :

$$A = 4\pi r^2 dr\, \rho \frac{f\mu}{a^2} = \frac{fm\mu}{a^2},$$

m désignant la masse de la couche sphérique. Si le point attiré est intérieur, u varie de $r - a$ à $r + a$,

$$A = 0.$$

Donc : *la couche sphérique n'exerce aucune action sur les points intérieurs, et elle attire les points extérieurs comme si toute sa masse était réunie à son centre.*

90. On peut démontrer géométriquement qu'une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur un point situé à son intérieur.

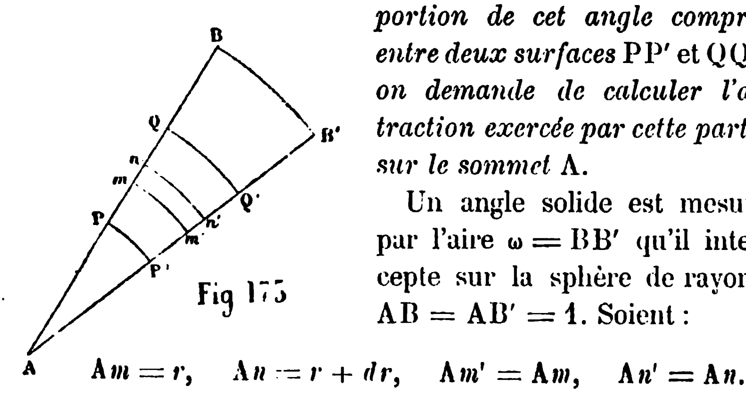


Fig 175

Lemme. — *Soient* A *un angle solide infiniment petit, et une portion de cet angle compris entre deux surfaces* PP′ *et* QQ′, *on demande de calculer l'attraction exercée par cette partie sur le sommet* A.

Un angle solide est mesuré par l'aire $\omega = BB'$ qu'il intercepte sur la sphère de rayon : $AB = AB' = 1$. Soient :

$$Am = r, \quad An = r + dr, \quad Am' = Am, \quad An' = An.$$

L'attraction exercée par $mm'\ nn'$ sur A est :

$$\text{surf. } mm' \times dr \times \frac{f\mu\rho}{r^2};$$

or :

$$\frac{\text{surf. } mm'}{\omega} = \frac{r^2}{1},$$

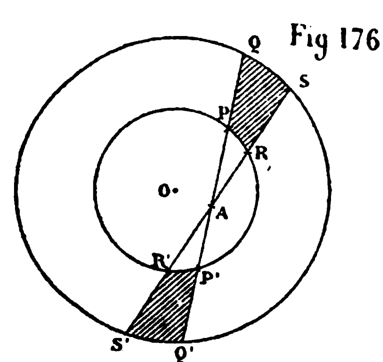
on a donc :

$$\omega\, r^2\, dr \times \frac{f\mu\rho}{r^2} = \omega f\mu\rho\, dr;$$

l'intégrale est donc :

$$\omega f\mu\rho \int dr = \omega f\mu\rho \times \text{PQ}.$$

Dans le cas de la couche sphérique, décomposons la surface de la sphère extérieure en éléments infiniment petits opposés deux à deux QS, Q'S', l'attraction exercée sur A par PQRS sera :



$$\omega f\mu\rho\, \text{PQ};$$

l'attraction exercée sur A par l'élément symétrique P'R' Q'S' sera :

$$\omega f\mu\rho\, \text{P'Q'}.$$

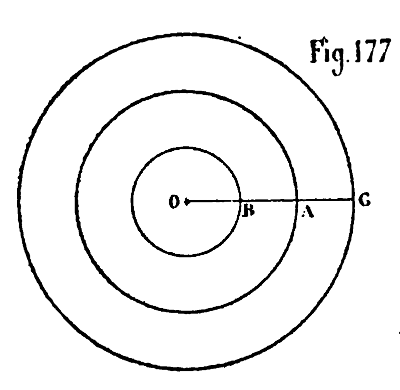
Or $\text{PQ} = \text{P'Q'}$; donc les deux actions sur le point A se détruisent.

91. *Attraction exercée par une couche sphérique, d'épaisseur finie, ou composée de couches concentriques homogènes sur un point extérieur.* — On aura :

$$\text{A} = \frac{f\mu}{a^2}\sum m = \frac{f\mu \text{M}}{a^2},$$

M désignant la masse de la couche sphérique, que la couche sphérique soit homogène ou composée de couches concentriques homogènes.

Si le point A est situé à l'intérieur de la couche, la couche AC n'exercera aucune action et la couche AB agira comme si sa masse était concentrée en O.



Dans le cas d'une sphère pleine, homogène, les résultats précédents subsistent; pour un point intérieur A, situé à la distance a du centre, on aura, en désignant par M′ la masse de la sphère de rayon a :

$$A = \frac{f\mu . M'}{a^2} = \frac{4}{3}\pi \frac{f\mu\, a^3 \rho}{a^2} = \frac{4}{3}\pi f \mu \rho a.$$

Cette attraction est donc proportionnelle à la distance du point attiré au centre.

Attraction d'un ellipsoïde homogène.

92. 1° Sur un point intérieur.

Soit l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

K le point intérieur α, β, γ; dm l'élément de la masse au point M (x, y, z), compris à l'intérieur de l'ellipsoïde; ρ la densité, MK $= r$; l'attraction de l'élément dm sur le point K, dont nous supposons la masse égale à μ, sera : $f\mu \frac{dm}{r^2}$; ce qui peut s'écrire, en introduisant l'élément de volume dv au

point M :

$$f\mu\rho\,\frac{dv}{r^2};$$

décomposons cette force en trois autres, parallèles aux axes; celle qui est parallèle à Ox sera :

$$f\mu\rho\,\frac{dv}{r^2}\times\frac{x-\alpha}{r}=f\mu\rho\,\frac{x-\alpha}{r^3}\,dv;$$

on pourra ajouter toutes les forces parallèles à un même axe, et on trouvera ainsi, en désignant par A, B, C les composantes parallèles aux axes de l'attraction de l'ellipsoïde tout entier sur le point K :

$$\left\{\begin{aligned} A &= f\mu\rho\int\frac{x-\alpha}{r^3}\,dv,\\ B &= f\mu\rho\int\frac{y-\beta}{r^3}\,dv,\\ C &= f\mu\rho\int\frac{z-\gamma}{r^3}\,dv,\end{aligned}\right.$$

les intégrations devant être étendues à toute la masse de l'ellipsoïde. Transportons l'origine des coordonnées en K, l'équation de l'ellipsoïde deviendra :

$$(1)\qquad \frac{(x_1+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y_1+\beta)^2}{b^2}+\frac{(z_1+\gamma)^2}{c^2}=1,$$

et les composantes de l'attraction :

$$\begin{aligned} A &= f\mu\rho\int\frac{x_1}{r^3}\,dv,\\ B &= f\mu\rho\int\frac{y_1}{r^3}\,dv,\\ C &= f\mu\rho\int\frac{z_1}{r^3}\,dv.\end{aligned}$$

Prenons au lieu de x_1, y_1, z_1 les coordonnées polaires, r, θ, ψ,

nous aurons :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta, \\ y_1 &= r\sin\theta\cos\psi, \\ z_1 &= r\sin\theta\sin\psi, \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{aligned} &r > 0, \\ &0 < \theta < \pi, \\ &0 < \psi < 2\pi, \end{aligned}\right.$$

$$dv = r^2\,dr\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

$$(2) \qquad A = f\mu\rho\int_0^{r_1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\psi,$$

r désignant le rayon vecteur de la surface de l'ellipsoïde, qui répond aux angles θ et ψ; l'équation (1) devient :

$$(3) \qquad Lr^2 + 2Mr + N = 0,$$

où :

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} L &= \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}, \\ M &= \frac{\alpha\cos\theta}{a^2} + \frac{\beta\sin\theta\cos\psi}{b^2} + \frac{\gamma\sin\theta\sin\psi}{c^2}, \\ N &= \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1. \end{aligned}\right.$$

On a $L > 0$, d'après l'expression même de cette quantité; $N < 0$, parce que le point K est intérieur à l'ellipsoïde; donc les deux racines de l'équation (3) sont de signes contraires; il faut prendre la racine positive, et écrire :

$$r_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L},$$

r varie de zéro à la valeur précédente. Dans (2), on peut intégrer par rapport à r et l'on a :

$$\int_0^{r_1} dr = r_1;$$

$$A = -f\mu\rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{L}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\psi$$
$$+ f\mu\rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\psi.$$

La deuxième intégrale qui figure dans l'expression de A est nulle; car, si l'on décompose cette intégrale en éléments, et que l'on associe les éléments qui répondent à :

$$\theta = \alpha, \qquad \psi = \beta,$$
$$\theta = \pi - \alpha, \quad \psi = \pi + \beta,$$

on voit que L et N sont les mêmes dans les deux cas; M se change en — M, mais M^2 ne change pas; $\frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L}$ est donc le même, et sin θ cos θ change de signe; les éléments sont donc deux à deux égaux et de signes contraires; donc :

$$A = -f\mu\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{M}{L} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi,$$

ou, en remplaçant L et M par leurs expressions (4) :

$$A = -f\mu\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\alpha\cos\theta}{a^2} + \frac{\beta\sin\theta\cos\psi}{b^2} + \frac{\gamma\sin\theta\sin\psi}{c^2}}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \, d\psi,$$

$$\frac{-A}{f\mu\rho} = \frac{\alpha}{a^2}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{L} d\theta \, d\psi + \frac{\beta}{b^2}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta\cos\theta\cos\psi}{L} d\theta \, d\psi$$
$$+ \frac{\gamma}{c^2}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta \cos\theta \sin\psi}{L} d\theta \, d\psi;$$

les deux dernières intégrales sont nulles, comme on le voit en groupant les éléments deux à deux comme il suit :

$$\theta = \alpha, \quad \psi = \beta, \quad \Big| \; M,$$
$$\theta = \alpha, \quad \psi = \pi + \beta, \quad \Big| \; M_1.$$

On a donc :

$$A = -\frac{f\mu\rho\alpha}{a^2}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\cos^2\theta \, d\theta \, d\psi}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{c^2}};$$

nous allons intégrer relativement à ψ; en remplaçant $\frac{\cos^2\theta}{a^2}$ par $\frac{\cos^2\theta}{a^2}(\cos^2\psi + \sin^2\psi)$, nous aurons à évaluer l'intégrale :

$$H = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{P\cos^2\psi + Q\sin^2\psi} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{P\cos^2\psi + Q\sin^2\psi},$$

où :

$$P = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2},$$

$$Q = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2},$$

sont des quantités essentiellement positives;

$$\int \frac{d\psi}{P\cos^2\psi + Q\sin^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{P}{Q}}\operatorname{tg}\psi\right) + \text{const}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{P\cos^2\psi + Q\sin^2\psi} = \frac{\pi}{2\sqrt{PQ}}.$$

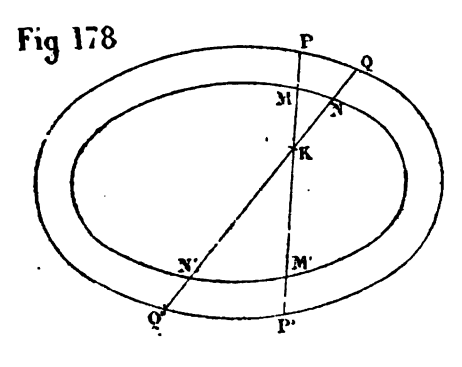
Il en résulte :

$$A = -4\pi f\mu\rho\frac{\alpha}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}}}d\theta.$$

On peut remarquer que les coordonnées du point attiré ne figurent pas dans l'intégrale définie; A est seulement proportionnel à α; ainsi, si le point attiré se déplace dans un plan perpendiculaire à Ox, la composante de l'attraction parallèle à Ox ne change pas.

Remarquons en outre que A est une fonction homogène et de degré zéro de a, b, c; il en serait de même de B et C; si donc on considère deux ellipsoïdes homothétiques de même densité, leurs attractions sur un point intérieur à chacun d'eux seront les mêmes; il en résulte qu'une couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques n'exerce aucune action sur un point de son intérieur; il est très

facile de s'en rendre compte géométriquement. Tout plan passant par le centre commun de deux ellipsoïdes homothétiques les coupera suivant deux ellipses homothétiques. Considérons un angle solide infiniment petit ayant son sommet en K; il détachera dans la couche deux éléments MNPQ, M'N'P'Q'. L'attraction de MNPQ sur K sera (voir l'article 89) :



$$\omega f \mu \rho \text{ MP};$$

l'attraction de M'N'P'Q' sera :

$$\omega f \mu \rho \text{ M'P'}.$$

Or :

$$\text{MP} = \text{M'P'};$$

ces deux actions se détruisent, et l'attraction de la couche entière sur le point K est nulle.

93. Réduction de A, B, C aux fonctions elliptiques. — Nous avons trouvé pour l'expression de A :

$$\text{A} = -4\pi f \mu \rho \frac{\alpha}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right)}}.$$

En suivant la même marche, on trouvera pour B et C :

$$\left\{\begin{aligned} \text{B} &= -4\pi f \mu \rho \frac{\beta}{b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2}}}, \\ \text{C} &= -4\pi f \mu \rho \frac{\gamma}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}, \end{aligned}\right.$$

Supposons :

$$a^2 < b^2 < c^2;$$

en représentant $\cos\theta$ par u, nous aurons :

$$A = -4\pi\rho\mu\alpha\frac{bc}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{1+\frac{b^2-a^2}{a^2}u^2}\sqrt{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}u^2}}.$$

On trouvera des expressions analogues pour B et C [1].

Ces quantités A, B, C s'obtiennent sous forme finie, lorsque l'ellipsoïde est de révolution. Supposons par exemple :

$$b = c, \text{ et } b > a;$$

faisons :

$$b^2 = a^2(1+\lambda^2),$$

et nous trouverons :

$$A = -4\pi f\mu\rho\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\lambda^2)\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{1+\lambda^2\cos^2\theta},$$

$$\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = -4\pi f\mu\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\theta}}.$$

Nous avons à trouver les valeurs des deux intégrales :

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1+\lambda^2\cos^2\theta}d\theta = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2u^2},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\lambda^2\sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1+\lambda^2-\lambda^2u^2}}.$$

Or :

$$\int\frac{u^2du}{1+\lambda^2u^2} = \frac{1}{\lambda^2}\int\frac{(1+\lambda^2u^2)-1}{1+\lambda^2u^2}du = \frac{1}{\lambda^2}\int du - \frac{1}{\lambda^3}\frac{d.\lambda u}{1+\lambda^2u^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}u - \frac{1}{\lambda^3}\text{arc tg}.\lambda u + \text{const.};$$

---

[1] Voir les *Exercices de calcul intégral* de Legendre, tome II, pour la réduction de ces intégrales aux formes canoniques.

donc :

$$H = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tg } \lambda).$$

Dans K nous ferons :

$$\lambda u = \sqrt{1 + \lambda^2} \sin \psi,$$

d'où :

$$du = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \cos \psi \, d\psi,$$

et l'expression de K deviendra :

$$K = \int_0^{\psi_1} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \sin^2 \psi \frac{\frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} \cos \psi \, d\psi}{\sqrt{1 + \lambda^2} \cos \psi},$$

formule dans laquelle :

$$\text{tg } \psi_1 = \lambda,$$

et par conséquent :

$$\sin \psi_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}},$$

$$K = \int_0^{\psi_1} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \sin^2 \psi \, d\psi = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^3} \int_0^{\psi_1} (1 - \cos 2\psi) \, d\psi,$$

$$K = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^3}(\psi_1 - \sin \psi_1 \cos \psi_1) = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^3}\left(\text{arc tg.} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

Donc :

$$A = -4\pi f \mu \rho \alpha \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tg } \lambda),$$

$$\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = -4\pi f \mu \rho \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^3}\left(\text{arc tg.} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

Soit M la masse de l'ellipsoïde, on aura :

$$M = \frac{4}{3} \pi abc\rho = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 (1 + \lambda^2);$$

donc :

$$A = -3f\mu M \frac{\alpha}{a^3\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tg} \lambda),$$

$$\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = -\frac{3f\mu M}{2a^3\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

On a :

$$\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \frac{\sqrt{B^2+C^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\sqrt{B^2+C^2}}{\alpha'}.$$

En désignant par N la projection du point attiré sur le plan de l'équateur yOz, et posant $\alpha' = ON$, la résultante de B et C est dirigée suivant NO et a pour valeur :

$$R = \sqrt{B^2+C^2},$$

$$R = \frac{3f\mu M\alpha'}{2a^3\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tg} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Lorsque l'ellipsoïde diffère peu d'une sphère, λ est une petite fraction et les expressions précédentes de A et R se développent en séries très convergentes à l'aide des formules :

$$\operatorname{arc\,tg} \lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} \cdots$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \lambda - \lambda^3 + \lambda^5 \ldots$$

Il en résulte :

$$A = -\frac{f\mu M\alpha}{a^3}\left\{1 - \frac{3\lambda^2}{5} + \frac{3\lambda^4}{7} - \frac{3\lambda^6}{9}\cdots\right\},$$

$$R = f\mu\frac{M\alpha'}{a^3}\left\{1 - \frac{6}{5}\lambda^2 + \frac{9}{7}\lambda^4 - \frac{12}{9}\lambda^6 + \ldots\right\}.$$

Attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur. — Théorème d'Ivory.

94. En opérant comme précédemment et conservant les mêmes notations, on trouverait :

$$A = f\mu\rho\iiint dr \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Ici les deux valeurs de r

$$r_2 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L}; \quad r_1 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L}$$

qui répondent à des valeurs données de θ et ψ sont positives; on intègre relativement à r entre r_1 et r_2, de sorte que :

$$\int dr = r_2 - r_1 = \frac{2\sqrt{M^2 - LN}}{L},$$

$$A = 2f\mu\rho \iint \frac{\sqrt{M^2 - LN}}{L} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\psi.$$

La présence du radical $\sqrt{M^2 - LN}$ complique beaucoup; en outre, la fixation des limites de θ et ψ est moins simple, de sorte que le problème semble d'une grande complication. Heureusement, le théorème d'Ivory permet de ramener ce cas au précédent.

95. Théorème d'Ivory. — Soient deux ellipsoïdes ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites, et ayant pour équations :

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

(2) $$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M, prenons un point M' dont les coordonnées x', y', z' sont liées à celles de M par les formules :

$$\frac{x'}{a'} = \frac{x}{a}; \quad \frac{y'}{b'} = \frac{y}{b}; \quad \frac{z'}{c'} = \frac{z}{c},$$

les points M et M' seront dits *correspondants* et on aura :

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1;$$

de telle sorte que si le point M appartient à l'ellipsoïde (1),

le point M′ se trouvera sur la surface de l'ellipsoïde (2). Supposons en outre que nos deux ellipsoïdes soient homofocaux, c'est-à-dire que leurs sections principales aient les mêmes foyers, ou que l'on ait :

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2; \quad a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2;$$

d'où :

$$(3) \qquad a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \lambda.$$

Ces deux ellipsoïdes jouissent des propriétés suivantes :

Soient M *et* N′ *deux points du premier ellipsoïde,* M′ *et* N *leurs correspondants sur le second.* On aura :

$$MN = M'N'.$$

Soient :

x, y, z les coordonnées de M; x', y', z' de M′,
α', β', γ' — N′; α, β, γ de N.

On aura :

$$x' = \frac{a'}{a} x; \quad y' = \frac{b'}{b} y; \quad z' = \frac{c'}{c} z;$$

$$\alpha = \frac{a'}{a} \alpha'; \quad \beta = \frac{b'}{b} \beta'; \quad \gamma = \frac{c'}{c} \gamma';$$

d'où :

$$\alpha x = \alpha' x'; \quad \beta y = \beta' y'; \quad \gamma z = \gamma' z'.$$

On a d'ailleurs :

$$\overline{MN}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$
$$\overline{M'N'}^2 = (x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2 + (z' - \gamma')^2,$$

d'où :

$$\overline{MN}^2 - \overline{M'N'}^2 = x^2 - x'^2 + y^2 - y'^2 + z^2 - z'^2 - \left\{(\alpha'^2 - \alpha^2) + (\beta^2 - \beta'^2) + (\gamma^2 - \gamma'^2)\right\}$$

$$= x^2\left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\right) + z^2\left(1 - \frac{c'^2}{c^2}\right)$$

$$- \alpha'^2\left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right) - \beta'^2\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\right) - \gamma'^2\left(1 - \frac{c'^2}{c^2}\right)$$

$$= \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - \lambda\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2}\right)$$

$$= \lambda\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right\} - \lambda\left\{\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} - 1\right\} = 0.$$

Donc :

$$MN = M'N'.$$

Cela posé, cherchons les composantes de l'attraction exercée par le premier ellipsoïde sur un point extérieur N, ayant pour coordonnées α, β, γ.

Nous aurons :

$$A = f\mu\rho\iiint \frac{x-\alpha}{u^3}\,dx\,dy\,dz,$$

où :

$$u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

d'où :

$$\frac{udu}{dx} = x - \alpha.$$

On peut donc écrire :

$$\frac{x-\alpha}{u^3} = \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = \frac{-d\frac{1}{u}}{dx},$$

$$A = -f\mu\rho\iiint \frac{d\cdot\frac{1}{u}}{dx}\,dx\,dy\,dz,$$

y et z ayant des valeurs déterminées. Intégrons relativement à x, nous aurons :

$$\int \frac{d\cdot\frac{1}{u}}{dx}\,dx = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}.$$

en désignant par u_1 et u_2 les distances du point N aux deux points où la parallèle à Ox déterminée par les valeurs données de y et z rencontre l'ellipsoïde (1). On aura donc :

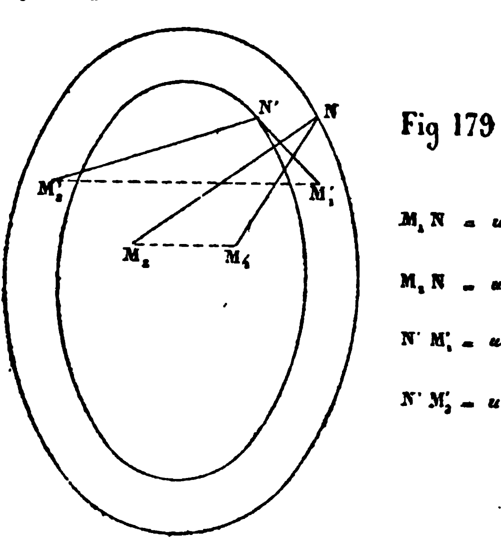
$$(4) \qquad A = -f\mu\rho\iint\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)dy\,dz,$$

où l'intégration doit s'étendre à toutes les valeurs de y et z

qui sont les coordonnées des points contenus à l'intérieur de l'ellipse :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0. \tag{5}$$

u_1 et u_2 seront des fonctions données de y et z.



Cela posé, faisons passer par le point N un ellipsoïde homofocal au proposé, et soit sur le premier ellipsoïde le point $N'(\alpha', \beta', \gamma')$ correspondant de N. Supposons ce second ellipsoïde homogène, et rempli de la même matière que le premier, et cherchons son attraction sur le point intérieur N'; soient A', B', C' les composantes de cette attraction, μ la masse du point N' la même que celle de N.

Nous aurons, en opérant comme précédemment :

$$A' = -f\mu\rho \iint \left(\frac{1}{u'_1} - \frac{1}{u'_2} \right) dy' \, dz'. \tag{6}$$

La parallèle à Ox déterminée par $y = y'$ et $z = z'$ rencontre la surface du second ellipsoïde aux points M'_1 et M'_2; u'_1 et u'_2 désignent les distances $N'M'_1$ et $N'M'_2$. Dans (6), les intégrations doivent s'étendre à tous les points intérieurs à l'ellipse :

$$\frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1, \quad x' = 0. \tag{7}$$

Or, dans nos deux intégrales (4) et (6), faisons correspondre 'es éléments, de manière que y et z ayant des valeurs déterminées dans (4), on prenne dans (6) :

$$y' = \frac{b'}{b}y; \quad z' = \frac{c'}{c}z.$$

On aura alors ces trois couples de points correspondants :

$$\begin{array}{c|c} N' & N \\ M_1 & M'_1 \\ M_2 & M'_2 \end{array}$$

donc :

$$N'M'_1 = NM_1; \quad N'M'_2 = NM_2,$$

c'est-à-dire :

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2;$$

donc (6) deviendra, en y remplaçant en outre $dy'\, dz'$ par $\frac{b'c'}{bc}\,dy\,dz$:

$$A' = -f\mu\rho\frac{b'c'}{bc}\iint\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)dy\,dz.$$

Pour les limites de y' et z', l'équation (7) donne :

$$\frac{1}{b'^2}\left(\frac{b'}{b}y\right)^2+\frac{1}{c'^2}\left(\frac{c'}{c}z\right)^2=1,$$

ou :

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

comme pour les limites définies par (5); donc :

$$A' = \frac{b'c'}{bc}A,$$

d'où :

$$(8)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{bc}{b'c'}A', \\ B = \dfrac{ca}{c'a'}B', \\ C = \dfrac{ab}{a'b'}C'. \end{cases}$$

Donc, les composantes A, B, C de l'attraction exercée par le premier ellipsoïde sur le point extérieur N se ramènent à celles A′, B′, C′ de l'attraction exercée par le second ellipsoïde sur le point intérieur N′; or, nous savons calculer A′, B′, C′; nous en déduirons donc A, B, C. On aura, par les formules relatives au point intérieur :

$$A' = -4\pi f \mu \rho \alpha' b' c' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(a'^2 \sin^2\theta + b'^2 \cos^2\theta)(a'^2 \sin^2\theta + c'^2 \cos^2\theta)}}.$$

En vertu de (8) et de :

$$\alpha' = \alpha \frac{a}{a'},$$

et des relations :

$$a'^2 = a^2 + \lambda; \quad b'^2 = b^2 + \lambda; \quad c'^2 = c^2 + \lambda,$$

on trouvera :

$$(9) \quad A = -4\pi f \mu \rho \frac{\alpha\, abc}{\sqrt{a^2+\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(\lambda + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(\lambda + a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}}.$$

Reste à déterminer λ, ce qui se fera au moyen de l'équation :

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

qui exprime que le second ellipsoïde passe par le point N (α, β, γ). On peut l'écrire :

$$(10) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

Cette équation du troisième degré en λ admet une racine comprise entre zéro et $+\infty$, une autre entre $-b^2$ et $-c^2$, et une troisième entre $-a^2$ et $-b^2$, $(a^2 < b^2 < c^2)$. La seule valeur qui donne un ellipsoïde est la première racine.

Résumons nos formules, et introduisons la masse M de l'ellipsoïde :

$$M = \frac{4}{3} \pi abc\rho,$$

et nous aurons :

1° Pour un point intérieur (α, β, γ) :

$$(a)\quad A = -3f\mu M \frac{\alpha}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)(a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta)}},$$

et pour B et C des expressions qu'on déduit de la précédente en permutant abc, $\alpha\beta\gamma$.

2° Pour un point extérieur (α, β, γ) :

$$(b)\quad A = -3f\mu M \frac{\alpha}{\sqrt{a^2+\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos^2\theta \, d\theta}{\sqrt{(\lambda + a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)(\lambda + a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta)}},$$

et pour B et C des expressions semblables; λ désigne la racine positive de l'équation :

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

Dans les deux cas, on est ramené à des intégrales elliptiques.

Lorsque le point attiré est sur la surface même de l'ellipsoïde, on a :

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0;$$

il en résulte $\lambda = 0$, et les deux formules (a) et (b) donnent bien la même valeur pour A, B, C.

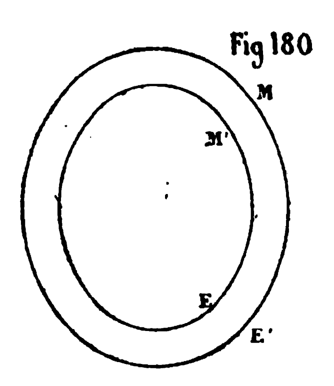
96. Remarques sur le théorème d'Ivory. — Ce théorème, démontré précédemment, peut s'énoncer ainsi :

Les attractions que deux ellipsoïdes homofocaux exercent, parallèlement à chaque axe, sur deux points correspondants, placés sur leurs surfaces respectives, sont entre elles comme les produits des deux axes perpendiculaires à chaque composante.

Soient A, B, C les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde E aux axes $2a$, $2b$, $2c$ sur le point extérieur M (α, β, γ) ;

A'', B'', C'' les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde E' aux axes $2a'$, $2b'$, $2c'$ sur le point intérieur M' $(\alpha', \beta', \gamma')$; A', B', C' les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde E' sur le point M de la surface. On aura, par le théorème d'Ivory :

$$(11) \qquad \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{A}} = \frac{b'c'}{bc}; \quad \frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{B}} = \frac{c'a'}{ca}; \quad \frac{\mathrm{C}''}{\mathrm{C}} = \frac{a'b'}{ab}.$$



Mais on a aussi, d'après ce qui a été démontré relativement à l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur :

$$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}''} = \frac{a}{a'} = \frac{a'}{a}.$$

Donc :

$$(12) \quad \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}''} = \frac{a'}{a}; \quad \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}''} = \frac{b'}{b}; \quad \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}''} = \frac{c'}{c}.$$

De (11) et (12) on déduit :

$$\frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}} = \frac{a'b'c'}{abc}.$$

D'où ce théorème :

L'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur a la même direction que celle qu'exercerait sur lui un ellipsoïde homofocal passant par ce point, et leurs intensités sont entre elles comme les volumes de ces deux corps.

Soient maintenant deux ellipsoïdes homofocaux E, E_1, aux axes $2a$, $2b$, $2c$, $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$; et A, B, C, A_1, B_1, C_1 les composantes des attractions exercées par ces deux ellipsoïdes sur un même point extérieur M; E' un ellipsoïde homofocal aux deux premiers, dont la surface passe par M, $2a'$, $2b'$, $2c'$ ses axes, A', B', C' les composantes de l'attraction qu'il

exerce sur le point M; on aura, par le théorème précédent :

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\frac{a'b'c'}{abc},$$

$$\frac{A_1}{A'}=\frac{B_1}{B'}=\frac{C_1}{C'}=\frac{a_1b_1c_1}{a'b'c'},$$

d'où :

$$\frac{A_1}{A}=\frac{B_1}{B}=\frac{C_1}{C}=\frac{a_1b_1c_1}{abc}=\frac{\frac{4}{3}\pi a_1b_1c_1}{\frac{4}{3}\pi abc}.$$

D'où ce théorème dû à Maclaurin :

Deux ellipsoïdes homofocaux homogènes exercent sur un même point extérieur aux deux, des attractions de même direction et dont les intensités sont proportionnelles aux volumes de ces corps.

Remarquons que le théorème d'Ivory a lieu quelle que soit la loi d'attraction. En effet, supposons l'attraction proportionnelle à une fonction quelconque de la distance $\varphi(u)$, on aura :

$$A=f\mu\rho\iiint\varphi(u)\frac{x-a}{u}\,dx\,dy\,dz=f\mu\rho\iiint(\varphi u)\frac{du}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Posons :

$$\int\varphi(u)\,du=F(u),$$

on aura :

$$A=f\mu\rho\iint\left\{F(u_1)-F(u_2)\right\}dy\,dz;$$

$$A'=f\mu\rho\iint\left\{F(u'_1)-F(u'_2)\right\}dy'\,dz';$$

or : $\left\{\begin{array}{l}u'_1=u_1,\\ u'_2=u_2,\end{array}\right.$ donc : $\left\{\begin{array}{l}F(u'_1)=F(u_1),\\ F(u'_2)=F(u_2),\end{array}\right.$

et

$$\frac{A'}{A}=\frac{b'c'}{bc}.$$

CHAPITRE XII

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU POTENTIEL.

97. Lorsque la loi d'attraction est quelconque, les composantes de l'attraction exercée par un corps C sur un point M (α, β, γ) sont exprimées par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} X &= f\mu\iiint \rho\varphi(u)\frac{x-\alpha}{u}\,dx\,dy\,dz, \\ Y &= f\mu\iiint \rho\varphi(u)\frac{y-\beta}{u}\,dx\,dy\,dz, \\ Z &= f\mu\iiint \rho\varphi(u)\frac{z-\gamma}{u}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right.$$

où :

$$u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque de C et u sa distance au point M; ρ est une fonction de x, y, z; les intégrations doivent s'étendre à toute la masse du corps C.

On peut ramener la détermination de X, Y, Z à celle d'une seule fonction U; posons en effet :

$$\int \varphi(u)\,du = F(u),$$

$$U = \iiint \rho\, F(u)\,dx\,dy\,dz,$$

U sera une certaine fonction de α, β, γ. Cherchons ses dérivées par rapport à α, β, γ; nous pourrons différentier

sous le signe $\int$, si la fonction F (u) ne passe pas par l'infini, c'est-à-dire si le point attiré ne fait pas partie de la masse du corps considéré; remarquant que :

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{(x-\alpha)}{u},$$

nous aurons :

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\iiint \rho\varphi(u)\,\frac{x-\alpha}{u}\,dx\,dy\,dz,$$

donc :

$$\left\{\begin{aligned} X &= -f\mu\,\frac{dU}{d\alpha},\\ Y &= -f\mu\,\frac{dU}{d\beta},\\ Z &= -f\mu\,\frac{dU}{d\gamma}. \end{aligned}\right.$$

Tout dépend donc de la fonction U que l'on nomme fonction potentielle, ou simplement potentiel.

Dans le cas où l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$

$$F(u) = \int \varphi(u)\,du = -\frac{1}{u};$$

nous prendrons :

$$V = \iiint \rho\,\frac{1}{u}\,dx\,dy\,dz = \int \frac{dm}{u},$$

en désignant par dm l'élément de masse, et nous aurons :

$$X = f\mu\,\frac{dV}{d\alpha};\quad Y = f\mu\,\frac{dV}{d\beta};\quad Z = f\mu\,\frac{dV}{d\gamma};$$

donc, à un facteur constant près, X, Y, Z sont les dérivées partielles du potentiel, par rapport aux coordonnées du point attiré.

Équation de Laplace.

98. Considérons toujours le cas où le point attiré ne fait pas partie de la masse attirante; nous pouvons différentier deux fois sous le signe $\int$, et nous aurons :

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \frac{d^2 V}{d\beta^2} + \frac{d^2 V}{d\gamma^2} = \iiint \rho \left(\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} \right) dx\, dy\, dz.$$

Comme on a :

$$u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

$$u\frac{du}{d\alpha} = \alpha - x; \quad \frac{d\frac{1}{u}}{d\alpha} = \frac{x-\alpha}{u^3};$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} = -\frac{1}{u^3} + \frac{3(x-\alpha)}{u^2} \frac{d \cdot \frac{1}{u}}{d\alpha};$$

on trouve les équations :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} &= -\frac{1}{u^3} + \frac{3\,(x-\alpha)^2}{u^5}, \\ \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} &= -\frac{1}{u^3} + \frac{3\,(y-\beta)^2}{u^5}, \\ \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} &= -\frac{1}{u^3} + \frac{3\,(z-\gamma)^2}{u^5}, \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} = -\frac{3}{u^3} + \frac{3}{u^5}\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right] = 0.$$

On a donc cette équation due à Laplace :

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \frac{d^2 V}{d\beta^2} + \frac{d^2 V}{d\gamma^2} = 0.$$

Avant d'aborder le cas délicat où le point attiré fait partie de la masse attirante, nous allons déterminer le potentiel d'une sphère homogène sur un point de son intérieur.

Considérons d'abord le potentiel d'une couche sphérique homogène comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$ sur le point P situé à une distance du centre $OP = a$; on aura :

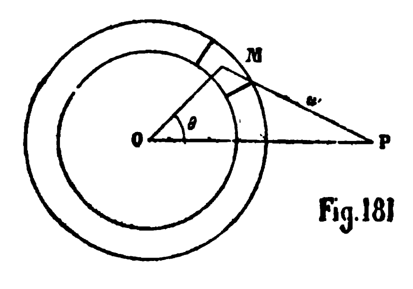


Fig. 181

$$V = \int \frac{dm}{u},$$

$$dm = \rho r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

$$V = \rho r^2 \, dr \iint \frac{\sin\theta \, d\theta \, d\psi}{u},$$

$$u^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos\theta.$$

On peut écrire :

$$V = 2\pi\rho \, r^2 \, dr \int \frac{\sin\theta \, d\theta}{u};$$

or :

$$\sin\theta \, d\theta = \frac{udu}{ar},$$

par conséquent :

$$V = 2\pi\rho \frac{rdr}{a} \int du. \tag{1}$$

1er cas. **Le point est extérieur.** — u varie de $a - r$ à $a + r$.

$$V = \frac{4\pi\rho \, r^2 \, dr}{a} = \frac{M}{a}, \tag{1}$$

M représentant la masse totale de la couche.

Le potentiel est le même que si toute la masse était réunie au centre O.

2e cas. **Le point est intérieur.** — u varie de $r - a$ à $r + a$.

$$V = 4\pi\rho \, r \, dr = \frac{M}{r}. \tag{2}$$

Le potentiel est constant pour tous les points de l'intérieur.

99. Potentiel d'une sphère homogène de rayon R′ sur un point de son intérieur, situé à une distance R du centre. — Nous avons à faire d'abord la somme des potentiels des couches comprises entre R et R′ sur le point intérieur P situé à la distance R du centre; il faudra prendre l'expression (2) et l'intégrer relativement à r entre les limites R et R′, ce qui donnera :

$$(3) = 2\pi\rho\,(R'^2 - R^2).$$

il faudra ensuite faire la somme des potentiels des couches comprises entre zéro et R sur le point extérieur P; nous devrons prendre l'expression (1), et l'intégrer relativement à r entre les limites zéro et R, ce qui donnera :

$$(4) = \frac{4}{3}\pi\rho\,R^2.$$

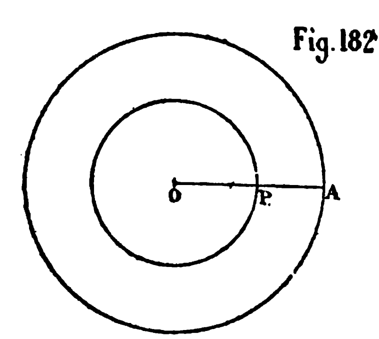
On aura donc pour le potentiel de la sphère sur le point intérieur P :

$$V = (3) + (4),$$

ou :

$$V = 2\pi\rho\left(R'^2 - \frac{R^2}{3}\right),$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$



On en conclut :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= -\frac{4}{3}\pi\rho\alpha, \\ \frac{dV}{d\beta} &= -\frac{4}{3}\pi\rho\beta, \\ \frac{dV}{d\gamma} &= -\frac{4}{3}\pi\rho\gamma. \end{aligned}\right.$$

Mais nous pouvons trouver d'autre part l'attraction de la sphère sur le point P; nous avons vu que la partie AP

n'agit pas, que la partie OP donne une force dirigée suivant PO, et égale à

$$\frac{4}{3}\pi f\mu\rho\frac{R^3}{R^2}=\frac{4}{3}\pi f\mu\rho R,$$

les composantes de cette force suivant les axes sont :

$$-\frac{4}{3}\pi f\mu\rho R\frac{\alpha}{R}=-\frac{4}{3}\pi f\mu\rho\alpha,$$

....

On a donc dans ce cas :

$$X=f\mu\frac{dV}{d\alpha},$$

$$Y=f\mu\frac{dV}{d\beta},$$

$$Z=f\mu\frac{dV}{d\gamma}.$$

Ainsi, ces formules démontrées pour un corps quelconque, dans le cas où le point attiré ne fait pas partie de la masse attirante, ont lieu encore dans le cas d'une sphère homogène, quand le point fait partie de la masse attirante; nous pouvons remarquer aussi que dans ce cas, V, $\frac{dV}{d\alpha}$, $\frac{dV}{d\beta}$, $\frac{dV}{d\gamma}$, X, Y, Z sont des quantités finies et continues, relativement à α, β, γ.

100. Attraction d'un corps quelconque sur un point faisant partie de sa masse. — On a toujours, en prenant le point attiré pour origine :

$$V=\iiint\rho\frac{1}{u}\,dx\,dy\,dz=\int\frac{dm}{u},$$

$$X=f\mu\int dm\,\frac{x}{u^3},$$

$$Y=f\mu\int dm\,\frac{y}{u^3},$$

$$Z=f\mu\int dm\,\frac{z}{u^3}.$$

Je dis que V, X, Y, Z sont toujours des quantités finies. Prenons les coordonnées polaires u, θ, ψ, nous aurons :

$$\left\{\begin{aligned} x &= u\cos\theta, \\ y &= u\sin\theta\cos\psi, \\ z &= u\sin\theta\sin\psi, \\ dm &= \rho u^2\, du\sin\theta\, d\theta\, d\psi; \end{aligned}\right.$$

il en résulte :

$$\left\{\begin{aligned} V &= \iiint \rho u\, du\sin\theta\, d\theta\, d\psi, \\ X &= f\mu \iiint \rho\cos\theta\sin\theta\, du\, d\theta\, d\psi, \\ Y &= f\mu \iiint \rho\sin^2\theta\cos\psi\, du\, d\theta\, d\psi, \\ Z &= f\mu \iiint \rho\sin^2\theta\sin\psi\, du\, d\theta\, d\psi, \end{aligned}\right.$$

les facteurs $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$ ont disparu, et il est évident que pour un corps limité V, X, Y, Z sont des quantités finies.

Supposons d'abord la densité ρ constante, nous allons montrer que dans ce cas on a encore :

$$X = f\mu\frac{dV}{d\alpha}; \quad Y = f\mu\frac{dV}{d\beta}; \quad Z = f\mu\frac{dV}{d\gamma}.$$

Décomposons le corps en deux parties (1) et (2), (2) se composant d'une petite sphère contenant le point attiré P dans son intérieur, on aura en désignant par V_1 et V_2 les potentiels correspondants à chacun des corps (1) et (2) :

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2, \\ X &= X_1 + X_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Or :

$$X_1 = f\mu\frac{dV_1}{d\alpha},$$

puisque le point attiré P ne fait pas partie du corps (1);

$$X_2 = f\mu \frac{dV_2}{d\alpha},$$

puisqu'il s'agit d'une sphère homogène. Donc :

$$X = \frac{dX_1}{d\alpha} + \frac{dX_2}{d\alpha} = f\mu \frac{dV_1}{d\alpha} + f\mu \frac{dV_2}{d\alpha} = f\mu \frac{dV}{d\alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cherchons dans la même hypothèse, ρ restant constant, ce que devient l'équation de Laplace, lorsque le point attiré fait partie de la masse attirante. On aura :

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{d^2V_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2V_2}{d\alpha^2},$$

et par conséquent :

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = \left(\frac{d^2V_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2V_1}{d\beta^2} + \frac{d^2V_1}{d\gamma^2}\right) + \left(\frac{d^2V_2}{d\alpha^2} + \frac{d^2V_2}{d\beta^2} + \frac{d^2V_2}{d\gamma^2}\right).$$

Or :

$$\frac{d^2V_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2V_1}{d\beta^2} + \frac{d^2V_1}{d\gamma^2} = 0,$$

puisque le point ne fait pas partie de la masse attirante; on a du reste :

$$\frac{dV_2}{d\alpha} = \frac{-4\pi}{3} \rho\alpha,$$

d'où :

$$\frac{d^2V_2}{d\alpha^2} = \frac{-4\pi}{3} \rho,$$

donc :

$$\frac{d^2V_2}{d\alpha^2} + \frac{d^2V_2}{d\beta^2} + \frac{d^2V^2}{d\gamma^2} = -4\pi\rho,$$

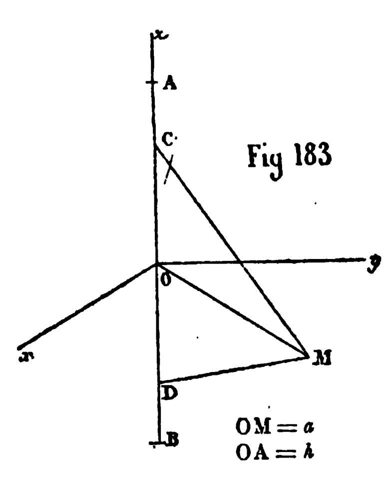
et :

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = -4\pi\rho,$$

ce qui est l'équation de Poisson.

On peut étendre les théorèmes précédents au cas où la densité ρ n'est pas constante, mais nous ne le ferons pas ici.

101. Attraction d'une droite matérielle homogène sur un point également distant des deux extrémités de la droite. — Soit la droite AB et le point M situé dans le plan mené perpendiculairement à la droite par le milieu O de sa longueur. Considérons deux éléments symétriques C et D, leurs attractions sur le point M seront égales chacune à



$$\frac{k\,dz}{\overline{MC}^2} = \frac{k\,dz}{z^2 + a^2}.$$

Leur résultante sera dirigée suivant MO et égale à :

$$\frac{2k\,dz}{z^2 + a^2}\cos.\mathrm{CMO} = \frac{2k\,dz}{a^2 + z^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

L'attraction R exercée par la droite sur le point M sera donc égale à :

$$\mathrm{R} = 2ka\int_0^h \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

or :

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}; \quad \int_0^h \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{a^2\sqrt{a^2 + h^2}},$$

donc :

$$\mathrm{R} = \frac{2kh}{a\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Cherchons le potentiel relatif à l'attraction de la droite sur

le point M :

$$V = 2\int_0^h \frac{k\,dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = 2k \log . \frac{h + \sqrt{a^2 + h^2}}{a}.$$

Soient x et y les coordonnées rectangulaires du point M; on aura :

$$a^2 = x^2 + y^2,$$

et en désignant par X et Y les composantes de R, on aura :

$$V = 2k \log \frac{h + \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$X = -2kh \frac{x}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}},$$

$$Y = -2kh \frac{y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}.$$

On vérifie aisément les relations connues :

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}.$$

Faisons maintenant tendre h vers l'infini, x et y restant finis, la droite s'étendra à l'infini au-dessus et au-dessous du plan des xy; V tendra vers l'infini, et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned} X &= -2k \frac{x}{x^2 + y^2} \\ Y &= -2k \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} R = \frac{2k}{a} = \frac{2k}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Le potentiel V, qui est infini, peut être remplacé par la fonction U :

$$U = -k \log (x^2 + y^2).$$

On a en effet :

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy},$$

et cette fonction des forces vérifie l'équation :

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = 0;$$

la fonction U est appelée le potentiel logarithmique.

Le résultat précédent peut être généralisé. Considérons un cylindre droit s'étendant à l'infini de part et d'autre du plan des xy. Prenons à l'intérieur de ce cylindre un prisme s'étendant également à l'infini de part et d'autre du plan des xy, et ayant pour base l'élément $dx\,dy$ de l'aire de la section droite, répondant au point N : son attraction sur le point M sera dirigée suivant MN et égale à $\frac{2K}{MN}$; soient α et β les coordonnées de M, $MN = u$, on aura pour les composantes de l'attraction du cylindre entier sur M :

$$\left\{\begin{aligned} X &= 2k\iint \frac{dx\,dy}{u}\frac{x-\alpha}{u} \\ Y &= 2k\iint \frac{dx\,dy}{u}\frac{y-\beta}{u} \\ Z &= 0. \end{aligned}\right. \qquad u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2.$$

Le potentiel n'existe pas d'après ce qui précède, mais il y a une fonction des forces

$$U = -k\iint dx\,dy \log(u^2) = -2k\iint dx\,dy \log u.$$

On a en effet :

$$X = \frac{dU}{d\alpha}; \quad Y = \frac{dU}{d\beta}; \quad Z = \frac{dU}{d\gamma} = 0.$$

On vérifie aisément la relation :

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} = 0,$$

car on a :

$$\frac{d\cdot\frac{x-\alpha}{u^2}}{d\alpha} + \frac{d\cdot\frac{y-\beta}{u^2}}{d\beta} = 0.$$

La quantité U se nomme le potentiel logarithmique. Nous allons en donner une application.

102. Cherchons l'attraction de la couche comprise entre deux cylindres circulaires droits, concentriques et très voisins, sur un point du plan des xy; les deux cylindres ont leurs génératrices perpendiculaires à ce plan, et s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de ce plan.

Faisons passer l'axe des x par le point attiré M, et représentons par a la distance OM, par r et $r+dr$ les rayons des deux cylindres, l'élément N de la section droite, compris entre deux rayons infiniment voisins, aura pour expression $r\,dr\,d\theta$, et l'on aura :

$$U = -kr\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \log(u^2),$$

$$u^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta.$$

1° $a < r$.

Nous écrirons :

$$u^2 = (r - ae^{\theta\sqrt{-1}})(r - ae^{-\theta\sqrt{-1}}) = r^2(1 - me^{\theta\sqrt{-1}})(1 - me^{-\theta\sqrt{-1}}),$$

$$m = \frac{a}{r} < 1.$$

Donc :

$$(1)\quad U_1 = -kr\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \left\{\log r^2 + \log[(1 - me^{\theta\sqrt{-1}})(1 - me^{-\theta\sqrt{-1}})]\right\}.$$

2° $a > r$.

Nous écrirons :

$$u^2 = (a - re^{\theta\sqrt{-1}})(a - re^{-\theta\sqrt{-1}}) = a^2(1 - ne^{\theta\sqrt{-1}})(1 - he^{-\theta\sqrt{-1}}),$$

$$n = \frac{r}{a} < 1.$$

Donc :

$$U_2 = -kr\,dr\int_0^{2\pi} d\theta \left\{\log a^2 + \log[(1 - ne^{\theta\sqrt{-1}})(1 - ne^{-\theta\sqrt{-1}})]\right\}.$$

Or, m étant < 1, on a, en série convergente :

$$\log[(1-me^{\theta\sqrt{-1}})(1-me^{-\theta\sqrt{-1}})] = -\frac{m}{1}e^{\theta\sqrt{-1}} - \frac{m^2}{2}e^{2\theta\sqrt{-1}}\ldots$$

$$-\frac{m}{1}e^{-\theta\sqrt{-1}} - \frac{m^2}{2}e^{-2\theta\sqrt{-1}}\ldots = -2\left[\frac{m}{1}\cos\theta + \frac{m^2}{2}\cos 2\theta\ldots\right].$$

On en conclut :

$$\int_0^{2\pi}\log[(1-me^{\theta\sqrt{-1}})(1-me^{-\theta\sqrt{-1}})]\,d\theta = 0;$$

les formules (1) et (2) deviennent donc :

(1 *bis*) $$U_1 = -2\pi kr\,dr\log r^2,$$

(2 *bis*) $$U_2 = -2\pi kr\,dr\log a^2.$$

Si maintenant l'axe des x est quelconque, on remplacera a^2 par $\alpha^2+\beta^2$ et l'on aura :

$$X_1 = \frac{dU_1}{d\alpha} = 0, \quad Y_1 = \frac{dU_1}{d\beta} = 0,$$

$$X_2 = \frac{dU_2}{d\alpha} = -4\pi kr\,dr\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$Y_2 = \frac{dU_2}{d\alpha} = -4\pi kr\,dr\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$R_2 = \sqrt{X_2^2+Y_2^2} = \frac{4\pi kr\,dr}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{4\pi kr\,dr}{a}.$$

Donc, la couche n'exerce aucune action sur un point intérieur, et elle attire les points extérieurs comme une seule droite indéfinie passant par le centre, et dont la densité serait $k\times 2\pi r\,dr = k\Sigma$, c'est-à-dire comme si toute la masse était réunie sur l'axe de la couche.

103. Attraction d'un cylindre circulaire homogène, plein, indéfini, sur un point de son intérieur M'.

Posons :

$$OM' = r', \quad OM = r.$$

On aura :

$$U = -2\pi k \int_{R'}^{R} r\,dr \log r^2 - 2\pi k \int_{0}^{R'} r\,dr \log R'^2.$$

Or :

$$\int d.r^2 \log r^2 = r^2 (\log r^2 - 1);$$

donc :

$$U = -\pi k [R^2 (\log R^2 - 1) - R'^2 (\log R'^2 - 1)] - \pi k R'^2 \log R'^2,$$
$$U = -\pi k [R^2 (2 \log R - 1) + R'^2],$$

ou bien, en remplaçant R'^2 par $\alpha^2 + \beta^2$:

$$U = -\pi k (\alpha^2 + \beta^2) - \pi k R^2 (2 \log R - 1).$$

On en déduit :

$$\text{(B)} \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} = -4\pi k,$$

et en opérant comme dans le cas de la sphère, on montrera que le potentiel logarithmique relatif à un cylindre quelconque satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} = 0,$$

quand le point attiré ne fait pas partie du corps, et à l'équation (B) dans le cas contraire.

CHAPITRE XIII

CALCUL DU MOUVEMENT DES PLANÈTES ET DES COMÈTES AUTOUR DU SOLEIL.

104. Nous allons partir de la loi de la gravitation universelle : nous réduirons le Soleil à un point matériel S de masse M, la planète P à un point matériel de masse m; soit f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance, posons $r = \mathrm{SP}$; le Soleil sera soumis à une force SA dirigée suivant SP, la planète à une force PB dirigée suivant PS; ces deux forces ont la même intensité $\frac{f\mathrm{M}m}{r^2}$.

Fig 184

Prenons trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ; désignons, relativement à ces axes, les coordonnées de S par X, Y, Z, celles de P par ξ, η, ζ. Si nous remarquons que les projections de la force SA sur les axes sont :

$$\frac{f\mathrm{M}m}{r^2} \cdot \frac{\xi - \mathrm{X}}{r}; \quad \frac{f\mathrm{M}m}{r^2} \cdot \frac{\eta - \mathrm{Y}}{r}; \quad \frac{f\mathrm{M}m}{r^2} \cdot \frac{\zeta - \mathrm{Z}}{r},$$

nous aurons pour déterminer X, Y, Z en fonction du temps

trois équations semblables à la suivante :

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{fMm}{r^2}\cdot\frac{\xi-X}{r}.$$

On peut diviser par M, et écrire :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2}&=fm\,\frac{\xi-X}{r^3},\\ \frac{d^2Y}{dt^2}&=fm\,\frac{\eta-Y}{r^3},\\ \frac{d^2Z}{dt^2}&=fm\,\frac{\zeta-Z}{r^3}.\end{aligned}\right.$$

On aura de même pour déterminer le mouvement de P les trois équations suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=fM\,\frac{X-\xi}{r^3},\\ \frac{d^2\eta}{dt^2}&=fM\,\frac{Y-\eta}{r^3},\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}&=fM\,\frac{Z-\zeta}{r^3}.\end{aligned}\right.$$

Il ne serait pas utile d'intégrer ces équations, parce qu'il serait impossible de déterminer les constantes arbitraires, positions et vitesses initiales du Soleil et de la planète, relativement à des axes fixes, quantités que nous ne connaissons pas. Il faut chercher le mouvement relatif de la planète autour du Soleil. Par le point S menons trois axes Sx, Sy, Sz parallèles aux axes fixes; relativement à ces nouveaux axes, désignons les coordonnées de la planète par x, y, z; nous aurons :

$$\xi=X+x;\quad \text{d'où}\quad x=\xi-X,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{d^2X}{dt^2},$$

et deux autres équations analogues pour déterminer $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

En tenant compte des équations (1) et (2), on trouvera :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)\,x}{r^3}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)\,y}{r^3}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{f(M+m)\,z}{r^3}. \end{array} \right.$$

Ces équations sont les mêmes que si l'on avait supposé tout d'abord le Soleil fixe et qu'on ait cherché le mouvement absolu de la planète P attirée par le Soleil par la force $\dfrac{fm\,(M+m)}{r^2}\cdot$ Nous poserons $M + m = \mu$, et nous aurons :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{f\mu x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{f\mu y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{f\mu z}{r^3} = 0. \end{array} \right.$$

En partant de ces équations, on prouvera, comme on l'a fait (tome I, p. 338), que la courbe décrite par la planète est située dans un plan passant par le centre du Soleil. Nous simplifierons nos formules, en prenant ce plan pour plan des xy; alors $z = 0$ et il reste les deux équations :

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{f\mu x}{r^3} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{f\mu y}{r^3} = 0 \end{array} \right\} \; r^2 = x^2 + y^2.$$

On en conclut, comme nous l'avons déjà vu (tome I, p. 339) :

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et en désignant par c une constante arbitraire, et représen-

tant par θ l'angle que fait le rayon vecteur r avec l'axe des x :

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c.$$

(4) $$r^2\frac{d\theta}{dt} = c; \qquad \Sigma = \frac{ct}{2}.$$

On déduit encore des équations (B) :

$$d\cdot\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 2f\mu\frac{xdx + ydy}{r^3} = 0,$$

ou bien :

$$d\cdot\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} + 2f\mu\frac{dr}{r^2} = 0.$$

Intégrant, et désignant la constante arbitraire par h, il vient :

(5) $$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \frac{2f\mu}{r} + h.$$

Les coordonnées polaires r et θ seront déterminées en fonction du temps par les équations (4) et (5). Si on élimine dt entre elles, il vient :

$$c^2\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} = \frac{2f\mu}{r} + h,$$

$$c^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = h + 2f\mu\frac{1}{r} - c^2\left(\frac{1}{r}\right)^2,$$

d'où :

$$d\theta = \frac{-cd\cdot\frac{1}{r}}{\sqrt{h + 2f\mu\frac{1}{r} - c^2\frac{1}{r^2}}} = \frac{-cd\cdot\frac{1}{r}}{\sqrt{h + \frac{f^2\mu^2}{c^2} - \left(c\frac{1}{r} - \frac{f\mu}{c}\right)^2}}.$$

En intégrant, et désignant la constante arbitraire par ω, il vient :

$$\theta - \omega = \text{arc cos}\cdot\frac{\frac{c}{r} - \frac{f\mu}{c}}{\sqrt{h + \frac{f^2\mu^2}{c^2}}},$$

$$\frac{c}{r}=\frac{f\mu}{c}+\sqrt{h+\frac{f^2\mu^2}{c^2}}\cos(\theta-\omega),$$

(6) $$r=\frac{\dfrac{c^2}{f\mu}}{1+\sqrt{1+\dfrac{c^2h}{f^2\mu^2}}\cos(\theta-\omega)}.$$

On reconnaît l'équation d'une section conique dont l'origine est un foyer; les planètes décrivant toutes des ellipses et non des hyperboles ou des paraboles, les conditions initiales doivent être telles que l'équation (6) représente une ellipse.

Faisons tourner l'axe des x de l'angle ω, et l'équation (6) s'écrira :

$$r=\frac{\dfrac{c^2}{f\mu}}{1+\sqrt{1+\dfrac{c^2h}{f^2\mu^2}}\cos\theta}.$$

En désignant par $2a$ le grand axe de l'ellipse, et par e l'excentricité, cette équation doit pouvoir s'écrire :

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

En comparant ces deux expressions de r, il vient :

$$\frac{c^2}{f\mu}=a(1-e^2),$$

$$e=\sqrt{1+\frac{c^2h}{f^2\mu^2}}.$$

On tire de là :

(7) $$h=\frac{-f\mu}{a}.$$

(8) $$c^2=f\mu a(1-e^2).$$

Les deux constantes h et c s'expriment donc au moyen de a et de e, qui donnent la forme et la grandeur de l'ellipse.

c étant le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur de la planète, on a :

$$c = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T},$$

ou, en faisant :

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad c = na^2\sqrt{1-e^2};$$

cette valeur de c étant comparée à (8), il en résulte :

$$(9) \qquad n^2 a^3 = f\mu.$$

n est la vitesse angulaire moyenne du rayon vecteur, qui décrit l'angle 2π dans le temps T ; on l'appelle encore simplement le *moyen mouvement*. La formule (9) montre que, pour les planètes, n et a ne peuvent pas avoir des valeurs quelconques ; pour une autre planète P′, on aura :

$$\mu' = M + m',$$
$$f\mu' = n'^2 a'^3.$$

On en conclut :

$$\frac{n^2 a^3}{n'^2 a'^3} = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{M+m}{M+m'},$$

ou bien :

$$(10) \qquad \frac{a^3}{a'^3} \cdot \frac{T'^2}{T^2} = \frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m'}{M}},$$

de manière que l'on n'a plus :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}.$$

Ainsi, nous avons trouvé que le mouvement de la planète doit bien vérifier les deux premières lois de Képler, mais ne satisfait plus à la troisième. Toutefois, si l'on remarque que les rapports $\frac{m}{M}$, $\frac{m'}{M}$ sont très petits, et égaux au plus à $\frac{1}{1050}$,

dans le cas de Jupiter, on voit que le second membre de l'équation (10) diffère très peu de 1; il s'en faut donc de bien peu que la troisième loi de Képler soit vérifiée, et de trop peu pour que Képler ait pu reconnaître avec les observations de Tycho, que cette loi n'était pas tout à fait exacte.

L'expression (5) de v^2, en tenant compte de la valeur de h, s'écrira :

(11) $$v^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Il faut maintenant déterminer la position de la planète sur son orbite à une époque quelconque. Prenons les formules :

(12) $$\frac{r^2 d\theta}{dt} = c = na^2\sqrt{1-e^2},$$
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

et éliminons θ entre les deux; nous aurons d'abord :

$$\cos\theta = \frac{a(1-e^2)-r}{er}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{er}\sqrt{1-e^2},$$
$$\sin\theta\, d\theta = \frac{a(1-e^2)}{e}\frac{dr}{r^2},$$
$$d\theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\frac{dr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}},$$

et, en reportant dans (12) :

(13) $$ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}},$$

la valeur absolue de $a-r$ doit être plus petite que ae; nous poserons, en introduisant une variable auxiliaire u :

$$a - r = ae\cos u,$$

d'où :

(14) $$r = a(1-e\cos u),$$

la formule :

$$dr = ae\sin u\, du.$$

(13) devient ainsi :

$$n\,dt = (1 - e \cos u)\,du,$$

d'où en intégrant et désignant la constante arbitraire par C :

$$(15) \qquad nt = u - e \sin u + C.$$

Par l'équation précédente, u est une fonction de t; (14) donne r en fonction de u, donc r est une fonction de t. On aurait pu intégrer directement la formule (13) et obtenir ainsi r en fonction de t; mais l'expression de r aurait été compliquée, et l'introduction de la variable u simplifie le calcul bien que le résultat final soit le même.

105. Signification géométrique de la variable u. — Sur le grand axe AA' de l'ellipse comme diamètre décrivons un cercle; soit M un point de l'orbite de la planète, N le point du cercle correspondant à la même abscisse $CP = x$. On a, comme on sait :

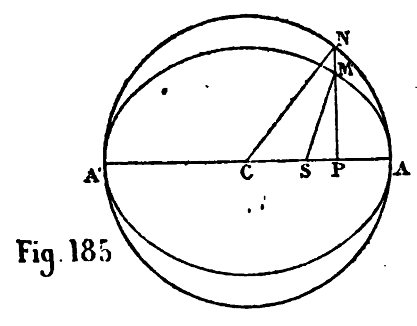


Fig. 185

$$r = SM = a - \frac{c}{a} x = a - ex = a(1 - e \cos u),$$

d'où :

$$x = a \cos u;$$

le triangle rectangle PCN donne :

$$CP = x = CN \cos ACN = a \cos ACN;$$

on aura donc :

$$u = ACN.$$

Cet angle u est ce qu'on appelle l'anomalie excentrique, $\theta = MSA$ est l'anomalie vraie.

$$\text{Au point A,} \quad u = 0, \quad \theta = 0,$$
$$\text{en A',} \quad u = \pi, \quad \theta = \pi.$$

Comptons le temps à partir du moment où la planète est à son périhélie; alors, pour $t = 0$, $u = 0$; la formule (15) donnera $C = 0$; on a donc :

$$(16) \qquad u - e \sin u = nt,$$

$$(17) \qquad r = a(1 - e \cos u);$$

l'équation (16) donnera u en fonction de t. Égalons l'expression précédente de r à celle fournie par l'équation de l'ellipse, et nous trouverons :

$$a(1 - e \cos u) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

d'où :

$$(18) \qquad \cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}.$$

(17) et (18) donneront donc r et θ en fonction de u, qui est lui-même donné en fonction de t. On tire de (18) :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u},$$

et de cette formule combinée avec (18) on déduira :

$$(19) \qquad \begin{cases} r \cos \theta = a(\cos u - e), \\ r \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin u. \end{cases}$$

Lorsqu'il s'agit de calculs numériques, ces deux formules peuvent remplacer avantageusement les formules (17) et (18); dans ce cas, on peut encore trouver des formules plus avantageuses; on déduit en effet de (18) :

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u} = 2(1 - e)\frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{1 - e \cos u},$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u} = 2(1 + e)\frac{\sin^2 \frac{u}{2}}{1 - e \cos u}.$$

On tire de là, en tenant compte de (17) :

(20) $$\begin{cases} \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{u}{2}, \\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{u}{2}, \end{cases}$$

(21) $$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Les formules (20) sont très élégantes et très simples, quand il s'agit de calculs numériques; la formule (21) est importante, c'est elle que l'on devra employer s'il s'agit seulement de calculer θ.

106. Développements analytiques de r et θ. — Nous poserons :

$$nt = \zeta,$$

la quantité ζ se nomme l'anomalie moyenne; c'est l'angle que ferait à l'époque t, avec SA, le rayon vecteur de la planète, si ce rayon vecteur tournait uniformément autour du point S, de manière à décrire l'angle 2π dans le temps T. Nous aurons :

$$u - e\sin u = \zeta,$$

(22) $$u = \zeta + e\sin u,$$

(23) $$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u.$$

107. Série de Lagrange. — Lagrange considère, d'une manière générale, l'équation :

(L) $$u = \zeta + e\,f(u),$$

qui détermine u en fonction de la variable ζ et du paramètre e; il se propose de développer une fonction donnée de u, $F(u)$, suivant les puissances de e, et il donne pour cela la série

suivante, qui porte son nom [1] :

$$F(u) = F(\zeta) + \frac{e}{1} f(\zeta)\, F'(\zeta) + \frac{e^2}{1.2} \frac{d.f^2(\zeta)\, F'(\zeta)}{d\zeta}$$
$$+ \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d^2.f^3(\zeta)\, F'(\zeta)}{d\zeta^2} \dots \dots + \frac{e^m}{1.2 \dots m} \frac{d^{m+1} f^m(\zeta)\, F'(\zeta)}{d\zeta^{m-1}} + \dots$$

Nous aurons, dans le cas actuel,

$$f(u) = \sin u; \quad f(\zeta) = \sin \zeta.$$

Pour développer l'expression (22) de r suivant les puissances de e, il faut développer de la même manière $\cos u$; nous ferons dans M :

$$F(u) = \cos u; \quad F(\zeta) = \cos \zeta,$$

et nous trouverons :

$$\cos u = \cos \zeta - \frac{e}{1} \sin^2 \zeta - \frac{e^2}{1.2} \frac{d.\sin^3 \zeta}{d\zeta}$$
$$- \frac{e^3}{1.2.3} \frac{d^2.\sin^4 \zeta}{d\zeta^2} \dots - \frac{e^m}{1.2 \dots m} \frac{d^{m-1} \sin^{m+1} \zeta}{d\zeta^{m-1}} - \dots$$

On peut développer $\sin^{m+1}\zeta$ par une formule connue, suivant les sinus des multiples de ζ, si m est pair, $\frac{d^{m-1} \sin^{m+1}\zeta}{d\zeta^{m-1}}$ se trouvera développé de la même manière; mais il est aisé de voir que ce développement ne contiendra que des cosinus; enfin, on peut ordonner relativement à $\cos \zeta$, $\cos 2\zeta$, $\cos 3\zeta \dots$; en reportant la valeur trouvée pour $\cos u$ dans l'expression (23) de $\frac{r}{a}$, et négligeant e^5, on aura :

$$\text{(N)} \qquad \frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \left(e - \frac{3e^3}{8}\right) \cos \zeta$$
$$- \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{3}\right) \cos 2\zeta - \frac{3e^3}{8} \cos 3\zeta - \frac{e^4}{3} \cos 4\zeta.$$

---

[1] On trouvera la démonstration de cette formule dans le *Cours* de M. Hermite à la Faculté des Sciences, 2e édition, p. 131. — Librairie A. Hermann.

Dans le cas des planètes, e est petit; le développement précédent suffira souvent; il serait du reste facile de le compléter.

Occupons-nous du développement de θ; partons pour cela de la formule :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C = na^2 \sqrt{1-e^2},$$

d'où, à cause de :

$$nt = \zeta; \quad r = a(1 - e\cos u):$$
$$d\theta = \sqrt{1-e^2}\,(1 - e\cos u)^{-2}\,d\zeta,$$

ou bien, en développant par la série du binôme $(1 - e\cos u)^{-2}$.

$$d\theta = \sqrt{1-e^2}\,(1 + 2e\cos u + 3e^2\cos^2 u + 4e^3\cos^3 u \ldots)\,d\zeta.$$

On développera l'expression de $\cos^n u$ suivant les puissances de e, par la formule de Lagrange, en y faisant : $F(u) = \cos^n u$; on développera également $\sqrt{1-e^2}$ suivant les puissances de e, par la formule du binôme, et on trouvera ainsi une expression de la forme suivante :

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = 1 + B_1\cos\zeta + B_2\cos 2\zeta + \ldots$$

d'où en intégrant, sans ajouter de constante, parce que pour $\zeta = 0$, $\theta = 0$.

$$\theta = \zeta + B_1\sin\zeta + \frac{B_2}{2}\sin 2\zeta + \ldots$$

On trouve, en négligeant e^5 comme précédemment :

$$\text{(P)} \qquad \theta - \zeta = \sin\zeta\left(2e - \frac{e^3}{4}\right) + \sin 2\zeta\left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right) + \sin 3\zeta\,\frac{13}{12}e^3 + \frac{103}{96}e^4\sin 4\zeta.$$

Les formules (N) et (P) permettront de calculer r et θ pour une époque quelconque; comme ces calculs se repré-

senteront fréquemment, on calculera, pour chaque planète, deux tables faisant connaître les valeurs numériques des seconds membres des équations (N) et (P) pour une série de valeurs équidistantes de ζ, comprises entre 0 et 360°; le calcul de $\frac{r}{a}$ et de $\theta - \zeta$ sera ainsi très simple; on obtiendra de cette manière pour une époque quelconque les valeurs numériques de r et θ, qui se nomment les coordonnées dans l'orbite. On passera de là aux coordonnées x, y, z rapportées à un système d'axes rectangulaires Sx, Sy, Sz qui sera le même pour toutes les planètes; on obtiendra ainsi les coordonnées héliocentriques; il faudra ensuite passer aux coordonnées géocentriques, de manière à calculer les coordonnées de la planète et les comparer à celles fournies directement par l'observation; mais ces calculs dépendent du cours d'astronomie, nous ne nous y arrêterons pas ici.

108. Calcul des coordonnées dans l'orbite, dans le cas du mouvement parabolique. — Considérons d'abord une orbite elliptique très allongée, dans laquelle a serait très grand, et e très voisin de 1; soit m la masse du corps circulant sur cette orbite, $2a$ et $2b$ les longueurs des axes de l'orbite, $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$ son paramètre; on aura :

$$(24) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

$$C = na^2 \sqrt{1 - e^2} = na^{\frac{3}{2}} \sqrt{p},$$

ou bien, à cause de

$$n^2 a^3 = f(M + m):$$

$$(25) \qquad C = \sqrt{f(M + m)} \sqrt{p}.$$

Si, maintenant, on fait tendre a vers l'infini, de manière que $\frac{b^2}{a} = p$ reste fini, l'ellipse aura pour limite une parabole

de paramètre p, et les équations (24) et (25) auront encore lieu; la masse m de la comète étant négligeable devant la masse M du Soleil, on pourra écrire :

$$C = \sqrt{fMp}, \quad \text{ou} \quad C = K\sqrt{p},$$

en faisant :

$$K^2 = fM.$$

On aura donc :

$$\frac{r^2\, d\theta}{dt} = K\sqrt{p},$$

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}};$$

reportant cette valeur de r dans l'équation précédente, il viendra :

$$K\, dt = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{2K\, dt}{p^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) d.\operatorname{tg}\cdot\frac{\theta}{2}.$$

En intégrant, sans ajouter de constante, ce qui reviendra à compter le temps à partir du moment du passage de la comète au périhélie, où $\theta = 0$, on aura :

$$\text{(Q)} \qquad \frac{2Kt}{p^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2},$$

$$\text{(R)} \qquad r = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

On trouvera donc θ en fonction de t; en résolvant une équation (Q) du troisième degré, la formule (R) donnera ensuite r.

Pour faciliter le calcul de θ, on construira une table donnant les valeurs numériques de la fonction $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}$,

pour des valeurs de θ équidistantes et assez rapprochées; cette table servira pour toutes les comètes; soit, pour la comète considérée, et pour l'époque t,

$$\frac{2Kt}{p^{\frac{3}{2}}} = N;$$

on cherchera par interpolation dans la table la valeur de θ telle que la valeur correspondante de $\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}$ soit égale à N.

109. Détermination des masses des planètes. — Considérons une planète accompagnée d'un ou de plusieurs satellites; soient m la masse de cette planète, a le demi-grand axe de l'orbite qu'elle décrit autour du Soleil, T la durée de sa révolution sidérale; soient de même m' la masse d'un des satellites, a' le demi-grand axe de l'orbite qu'il décrit autour de sa planète, T' la durée de la révolution de ce satellite, et enfin M la masse du Soleil; on aura, comme on l'a vu précédemment, la relation :

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

On aura, de la même manière, dans le mouvement du satellite autour de la planète :

$$f(m + m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2},$$

d'où, en éliminant f:

$$\frac{M + m}{m + m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2,$$

$$(1) \qquad \frac{\frac{M}{m} + 1}{1 + \frac{m'}{m}} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2.$$

Le rapport $\frac{a}{a'}$ est connu par les observations; il en est de

même du rapport $\frac{T'}{T}$; si l'on en excepte la Lune, le rapport $\frac{m'}{m}$ est très petit, toujours au-dessus de $\frac{1}{10000}$; en négligeant cette petite quantité, l'équation (1) donne :

$$\frac{M}{m} + 1 = \left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{T'}{T}\right)^2,$$

et le plus souvent, comme m est très petit devant M, on pourra se borner à

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3\left(\frac{T'}{T}\right)^2,$$

d'où :

$$\frac{m}{M} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Ce moyen de déterminer la masse d'une planète, ou plutôt, le rapport de sa masse à celle du Soleil, peut être et est réellement employé pour Mars qui a 2 satellites connus depuis peu, pour Jupiter qui en a 4, Saturne 8, Uranus 4 et Neptune 1; dans le cas où il y a plusieurs satellites, on peut employer chacun d'eux à la détermination du rapport $\frac{m}{M}$; on aura ainsi une vérification et une précision plus grande.

Dans le cas de la Terre, nous avons dit qu'on ne peut pas négliger $\frac{m'}{m}$ dans l'équation (1); on peut s'adresser à d'autres phénomènes qui font connaître le rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre; par exemple, au phénomène des marées, ou mieux encore à celui de la nutation de l'axe terrestre, d'où l'on tire

$$\frac{m'}{m} = \frac{1}{81};$$

l'équation (1) donnera ensuite le rapport de la masse de la

Terre à la masse du Soleil. Mais il vaut mieux employer le moyen suivant :

Supposons la Terre sphérique, et composée de couches sphériques concentriques homogènes; soit r son rayon; l'attraction de la Terre sur l'unité de masse placée en un point de sa surface sera $\frac{fm}{r^2}$; c'est l'accélération g de la pesanteur; on aura donc :

$$\frac{fm}{r^2} = g.$$

On a du reste :

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

d'où, en éliminant f :

$$\frac{M}{m} + 1 = \frac{4\pi^2 a^3}{g r^2 T^2},$$

tout est connu dans le second membre; on aura donc le rapport $\frac{M}{m}$.

Soit ϖ la parallaxe horizontale moyenne du Soleil, on a :

$$\frac{r}{a} = \sin \varpi; \quad a = \frac{r}{\sin \varpi};$$

l'équation précédente, en négligeant 1 devant $\frac{M}{m}$, donnera donc :

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 r}{g T^2 \sin^3 \varpi}.$$

On peut remplacer $\sin \varpi$ par ϖ, parce que ϖ est très petit; on trouve ainsi, en désignant par k une constante bien connue par les observations :

$$\frac{m}{M} = k\,\varpi^3,$$

de manière que, la parallaxe du Soleil étant supposée

connue, soit par les observations du passage de Vénus, soit par tout autre moyen, on aura le rapport $\frac{M}{m}$; inversement, si le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil était supposé connu, on en déduirait la parallaxe du Soleil et, par suite, sa distance à la Terre (1).

Restent donc les deux seules planètes, Mercure et Vénus, dépourvues de satellites, et dont on ne peut pas trouver les masses par le procédé ci-dessus. Disons en peu de mots comment on arrive à la connaissance de ces deux masses.

Nous avons vu que, si une planète existait seule, elle décrirait une ellipse invariable autour du centre du Soleil comme foyer, mais il n'en est pas ainsi; la planète est soumise aussi à l'attraction des autres planètes; de là naissent des forces dont il faut tenir compte, mais qui, heureusement, sont petites, parce que les masses des planètes sont petites en comparaison de la masse du Soleil, et que les planètes n'arrivent jamais à passer très près les unes des autres. Il en résulte que chaque planète décrit autour du Soleil une courbe peu différente de l'ellipse primitive; elle éprouvera seulement des perturbations; le calcul de ces perturbations est extrêmement compliqué; c'est l'objet principal de la Mécanique Céleste.

Ainsi, l'action de Vénus fera sortir un peu la Terre de son orbite elliptique; on conçoit que de ces dérangements on puisse déduire la masse de Vénus; on déduira de même la masse de Mercure des perturbations qu'elle fait subir au mouvement de Vénus, ou mieux encore des perturbations qu'elle produit dans le mouvement des comètes, telles que la comète d'Encke, qui approchent beaucoup plus de Mercure

---

(1) Nous nous sommes bornés à donner une idée de la méthode, qui est plus compliquée en réalité, car il faut tenir compte de ce que la Terre n'est pas sphérique, et de son mouvement de rotation.

que ne le fait Vénus. On a trouvé ainsi les nombres suivants, adoptés par Le Verrier.

PLANÈTES.	$\frac{m}{M}$	PLANÈTES.	$\frac{m}{M}$
Mercure.	$\frac{1}{4\,320\,000}$	Jupiter.	$\frac{1}{1\,050}$
Vénus.	$\frac{1}{412\,150}$	Saturne.	$\frac{1}{3\,512}$
La Terre.	$\frac{1}{324\,440}$	Uranus.	$\frac{1}{24\,000}$
Mars.	$\frac{1}{3\,093\,000}$	Neptune.	$\frac{1}{14\,400}$

La masse de Jupiter est, à elle seule, plus grande que la somme des masses de toutes les autres planètes. Quant à la somme des masses des petites planètes connues ou inconnues, Le Verrier a montré qu'elle est plus petite que le huitième de la masse de la Terre.

Les lois de la gravitation s'appliquent aux étoiles doubles, dont les mouvements découverts par W. Herschel, sont soumis aux deux premières lois de Képler. Désignons par M' et m' les masses de l'étoile principale d'une étoile double et de son satellite, T' la durée de la révolution du satellite autour de l'étoile principale, M la masse du Soleil, m celle de la Terre, T la durée de l'année sidérale, a le demi-grand axe de l'orbite de la Terre, a' le demi-grand axe de l'orbite du satellite stellaire, Δ la distance de l'étoile double au Soleil; en supposant que la constante f soit la même dans les deux systèmes, on aura les relations suivantes :

$$f(M' + m') = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2},$$

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

d'où, avec une précision bien suffisante :

$$\frac{M' + m'}{M} = \frac{a'^3}{a^3} \frac{T^2}{T'^2}.$$

Les observations font connaître, non pas a', mais le rapport $\frac{a'}{\Delta}$, que nous représenterons par α' ; nous aurons donc :

$$\frac{M' + m'}{M} = \alpha'^3 \left(\frac{\Delta}{a}\right)^3 \frac{T^2}{T'^2},$$

de telle sorte que, si la distance Δ de l'étoile double au Soleil est connue, on en déduira la somme des masses des deux composantes. On trouve ainsi dans le cas de 70 *p* Ophiuchus, que la somme des masses des deux composantes est égale à environ trois fois la masse du Soleil.

Dans les belles expériences de Cavendisch, on a pu mettre en évidence l'attraction de deux sphères l'une sur l'autre à la surface de la Terre, et en conclure le rapport de la masse de la Terre à celle de chacune des sphères. On conçoit donc qu'étant donnée la masse d'un corps pris sous nos yeux, on puisse exprimer combien de masses égales à celle du corps sont contenues dans le soleil, ou dans les diverses planètes. On déduit aussi des expériences de Cavendisch la densité moyenne de la Terre, et on en conclut les densités moyennes des divers corps de notre système planétaire.

CHAPITRE XIV

MOUVEMENT
D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE DONNÉE.

110. Avant de nous occuper du mouvement d'un point matériel sur une surface, nous allons donner une généralisation importante du principe des aires.

Considérons un point matériel libre, ou rendu tel par l'introduction de la résistance de la courbe ou de la surface sur lesquelles il pourrait être assujetti à rester; soient X, Y, Z les projections sur trois axes rectangulaires de la résultante R des forces qui agissent sur le point matériel; on aura :

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

On en déduit :

$$(2) \qquad m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = xY - yX.$$

$xY - yX$ est le moment de la force R par rapport à l'axe des z; si ce moment est nul, on aura :

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

d'où :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{const.};$$

c'est à dire que le principe des aires aura lieu pour la projection du mouvement sur le plan des xy. Le moment de R par rapport à Oz sera nul, si R rencontre Oz, ou lui est parallèle; on a donc ce théorème :

Quand la résultante des forces qui agissent sur un point matériel est toujours dans un même plan avec une droite fixe Oz, *les aires décrites par le rayon vecteur de la projection du mobile sur un plan* xOy *perpendiculaire à* Oz *sont proportionnelles aux temps.*

Réciproquement, si les aires sont proportionnelles aux temps, l'équation (3) a lieu et (2) donne :

$$x\mathrm{Y} - y\mathrm{X} = 0,$$

c'est à dire que le moment de la force R par rapport à Oz est nul, ou que R est toujours dans un même plan avec Oz.

On voit que dans ce cas on a une intégrale (3), c'est l'*intégrale des aires.*

111. Mouvement d'un point matériel sur une surface fixe donnée. — Soient x, y, z les coordonnées du point, qui se trouve constamment sur la surface.

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Nous supposerons que le point ne puisse pas sortir, dans son mouvement, de la surface (1), quelles que soient les combinaisons mécaniques employées pour obtenir ce résultat; par exemple, pour plus de simplicité, que la surface constitue un obstacle matériel sur lequel le mobile se trouve appuyé. Nous continuerons d'appeler réaction de la surface, la force, dirigée suivant la normale, capable de tenir lieu de la présence de la surface. Soit N cette réaction inconnue; en l'introduisant, nous pourrons considérer le point comme

libre; soient X, Y, Z les composantes de la force qui agit directement sur le mobile, nous aurons :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + NV\frac{df}{dx}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + NV\frac{df}{dy}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + NV\frac{df}{dz}, \end{aligned}\right. \qquad V = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

En éliminant NV entre les trois équations (2), on aura deux équations qui, combinées avec (1), permettront de déterminer x, y, z, en fonction de t; l'une des équations (1) servira ensuite à déterminer NV, d'où la valeur de N et le signe de V.

Assez souvent, on profite de l'équation de la surface pour exprimer x, y, z en fonction de deux variables indépendantes λ et μ. Par exemple, si l'équation (1) est celle de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on pourra poser :

$$x = a\cos\lambda\cos\mu; \quad y = b\cos\lambda\sin\mu; \quad z = c\sin\lambda.$$

Soit d'une manière générale :

$$(3)\qquad x = \varphi(\lambda, \mu); \quad y = \psi(\lambda, \mu); \quad z = \chi(\lambda, \mu).$$

On tirera de ces équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

en fonction de

$$\lambda, \mu, \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \quad \frac{d^2\mu}{dt^2},$$

et on portera dans (2); en éliminant N, on aura les deux équations du mouvement en fonction de u et v. Lagrange a fait connaître un procédé, sur lequel nous aurons à revenir

plus tard, qui permet d'écrire immédiatement ces deux équations différentielles d'où dépendent λ et μ.

Il faut toujours avoir soin d'appliquer le principe des aires et celui des forces vives, quand les conditions supposées par ces principes sont remplies. Ainsi nous avons trois moyens : 1° emploi des équations (2), qui déterminent tout; 2° emploi des équations de Lagrange; 3° emploi des théorèmes généraux. Dans les deux dernières méthodes, on ne fait pas intervenir la pression exercée par le mobile sur la surface et par suite la réaction de la surface.

Le mouvement du point une fois connu, on trouve très facilement la pression qui s'exerce sur la surface directrice, soit analytiquement au moyen des équations (2), soit géométriquement, en introduisant la considération de la force tangentielle et de la force centripète, comme nous allons le faire voir.

Soient M la position du mobile sur sa trajectoire; MN la normale à la surface, sur laquelle nous portons une longueur représentant la réaction inconnue N, qu'on veut déterminer; MC la normale principale de la trajectoire en M; ρ le rayon de courbure MC; θ l'angle de ce rayon de courbure avec la normale MH; MP la force motrice P; R le rayon de courbure MH de la section normale ayant la même tangente en M que la trajectoire. On aura par le théorème de Meunier :

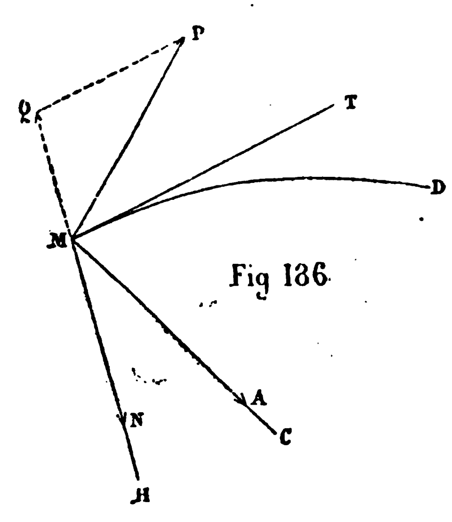


Fig 136.

$$(a) \qquad \rho = R \cos \theta.$$

Les forces N et P doivent être équivalentes à l'ensemble des forces $\frac{mv^2}{\rho}$ dirigé suivant MC, et $m\frac{dv}{dt}$ dirigé suivant la tangente MT; en projetant sur MN, on aura, en désignant par Q la projection de la force motrice :

$$N - Q = \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta,$$

ou, à cause de (a) :

$$N - Q = \frac{mv^2}{R},$$

$$N = Q + \frac{mv^2}{R}.$$

La force Q sera regardée comme positive, quand elle aura une direction opposée à celle du rayon de courbure MH de la section normale, et négative dans le cas contraire. La réaction N de la surface sera positive quand elle sera dirigée suivant MH, et négative dans le cas contraire.

112. Cas où aucune force extérieure n'agit sur le mobile. — La seule force dont il y aura à tenir compte sera la réaction normale de la surface; on sait que, pour un point libre, la résultante des forces est située dans le plan osculateur; ainsi, la normale à la surface est une normale à la courbe décrite par le mobile situé dans le plan osculateur, donc c'est la normale principale de la courbe, et le plan osculateur est normal à la surface en chacun des points de la trajectoire. Donc la trajectoire est une ligne géodésique de la surface. On aura en outre :

$$N = \frac{mv^2}{\rho}, \quad 0 = \frac{dv}{dt}.$$

Ainsi, la vitesse est constante, et la réaction de la surface est en raison inverse du rayon de courbure.

Remarque. — Les lignes géodésiques définies par la condition d'avoir leur plan osculateur normal à la surface en tous les points, jouissent donc des trois propriétés suivantes :

1° **Propriété géométrique.** — Elles sont les plus courtes entre deux de leurs points.

2° **Propriété statique.** — C'est la figure d'équilibre d'un fil tendu sur la surface.

3° **Propriété dynamique.** — C'est le chemin que suit sur la surface un mobile abandonné à sa propre vitesse.

Le moyen le plus commode de déterminer les lignes géodésiques d'une surface est souvent de les considérer comme les trajectoires décrites par un point matériel lancé sur la surface sans qu'aucune force extérieure n'agisse sur lui (¹).

113. Mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné. — Soit le plan FCD, faisant l'angle α avec le plan horizontal HCD. On peut décomposer le poids $MP = mg$ du point matériel, en deux forces : l'une $MB = mg \cos \alpha$ normale au plan, l'autre $MA = mg \sin \alpha$ dirigée suivant la ligne de plus grande pente; il y aura aussi à considérer la réaction normale N du plan; en sorte que le point matériel sera soumis à l'action des forces N et $mg \cos \alpha$, normales au

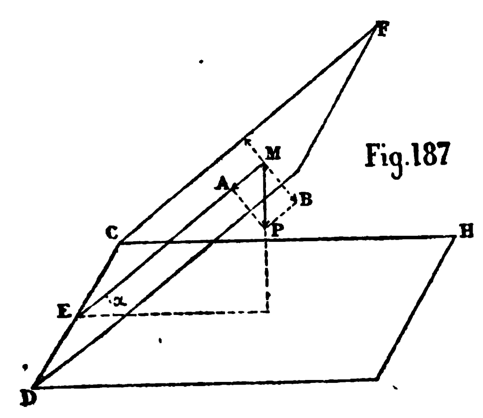


Fig.187

(¹) Voir : Jacobi, *Vorlesungen uber Dynamik*, pour la détermination des lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

plan, et à la force mg sin α située dans le plan, et ayant dans ce plan une direction constante. On aura :

$$N = mg \cos \alpha,$$

et le mouvement sera produit exclusivement par la force mg sin α, de direction et d'intensité constantes. Donc, ce mouvement sera un mouvement parabolique, l'axe de la parabole étant parallèle à la ligne de plus grande pente du plan. Si la vitesse initiale était nulle, le mouvement aurait lieu suivant la ligne de plus grande pente du plan; on pourra appliquer les formules données pour le mouvement des corps pesants dans le vide, en y remplaçant g par g sin α.

114. Mouvement d'un point matériel pesant sur une surface de révolution dont l'axe est vertical. — Prenons l'axe de révolution pour axe des z, et supposons-le vertical et dirigé vers le haut; soient x, y, z les coordonnées du mobile; au lieu de x et y nous prendrons les coordonnées polaires r et θ, de manière que z, r et θ seront les coordonnées du mobile; l'équation de la surface de révolution sera :

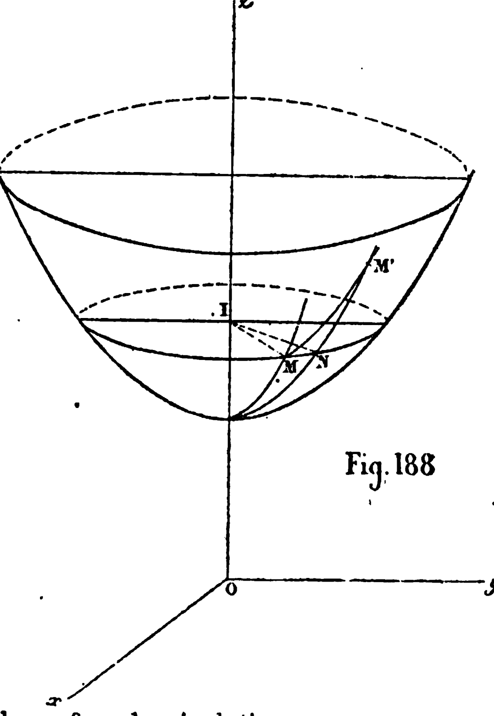


Fig. 188

$$z = f(r).$$

A la pesanteur mg, il faudra joindre la réaction normale de la surface, laquelle sera située dans le plan méridien et rencontrera Oz; la résultante des deux forces qui agissent sur le mobile rencontrera cet axe, et le principe des aires aura lieu pour la projection sur le plan xOy; le principe des forces vives a lieu aussi; on aura donc :

$$v^2 - v_0^2 = 2g\,(z_0 - z),$$
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

On a :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

mais :

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2,$$
$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2}{dt^2},$$

et en remplaçant dz par $f'(r)\,dr$:

$$v^2 = \frac{dr^2 \left\{ 1 + f'^2(r) \right\} + r^2\,d\theta^2}{dt^2};$$

si l'on met au lieu de dt sa valeur $r^2 \frac{d\theta}{c}$, il vient :

$$v^2 = c^2\,\frac{dr^2 \left\{ 1 + f'^2(r) \right\} + r^2\,d\theta^2}{r^4\,d\theta^2} = v_0^2 + 2gz_0 - 2g\,f(r),$$

et en résolvant par rapport à $d\theta$:

$$d\theta = \pm \frac{c\,dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{r^2 \left\{ v_0^2 + 2gz_0 - 2g\,f(r) \right\} - c^2}},$$

ou, en intégrant :

$$\text{(A)} \quad \theta - \theta_0 = \pm c \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{r^2 \left\{ v_0^2 + 2gz_0 - 2g\,f(r) \right\} - c^2}}.$$

On aura donc l'équation de la projection de la trajectoire par

une quadrature; on aura ensuite :

$$dt = r^2 \frac{d\theta}{c},$$

et en remplaçant $d\theta$ par sa valeur ci-dessus :

$$dt = \pm\, r dr \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{r^2 \left\{ v_0^2 + 2gz_0 - 2g\, f(r) \right\} - c^2}},$$

(B) $$t = \pm \int_{r_0}^{r} r dr \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{r^2 \left\{ v_0^2 + 2gz_0 - 2gf(r) \right\} - c^2}},$$

en désignant par r_0, v_0, z_0 et θ_0 les valeurs initiales de r, v, z et θ.

Il nous reste à déterminer la constante c, à l'aide des conditions initiales.

Désignons en général par α l'angle que fait la vitesse au point M avec la tangente au parallèle en ce point; soient M' un point infiniment voisin de M, M'N le méridien du point M', qui rencontre en N le méridien du point M; on a :

$$\cos \alpha = \frac{\text{MN}}{\text{MM}'} = \frac{r d\theta}{ds};$$

d'où :

$$v \cos \alpha = \frac{r d\theta}{dt} = \frac{c r d\theta}{r^2\, d\theta};$$

donc :

(1) $$c = r\, v \cos \alpha.$$

En appliquant cette équation générale à l'instant initial, on aura :

(C) $$c = r_0\, v_0 \cos \alpha_0,$$

α_0 est l'une des données : c'est l'angle que fait la vitesse initiale avec la tangente au parallèle du point de départ.

Reste enfin à fixer le signe qu'on doit prendre au départ, dans les formules (A) et (B); on a :

$$dz = f'(r)\, dr,$$

Si $f'(r_0) > 0$, z augmente avec r; si donc en M_0 le mobile est lancé au-dessus du parallèle du point M_0, r devra commencer par croître; il faudra prendre alors le signe + dans les formules (A) et (B). Les formules (A), (B), (C) résolvent donc entièrement le problème.

115. Lignes géodésiques des surfaces de révolution. — Si, dans les formules ci-dessus, nous supposons $g = 0$, nous aurons la trajectoire suivie sur notre surface de révolution par un point matériel animé d'une vitesse initiale, sans qu'aucune force agisse sur lui; nous savons que cette trajectoire est une ligne géodésique de la surface; en faisant varier r_0, θ_0, v_0, α_0, on aura toutes les lignes géodésiques. L'équation (A) donnera, en faisant $\frac{v_0}{c} = \frac{1}{k}$:

$$(2) \qquad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{k\,dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{r^2 - k^2}};$$

v étant constamment égal à v_0 dans ce cas, la formule (1) donnera :

$$(3) \qquad r \cos \alpha = \frac{c}{v_0} = k.$$

C'est la propriété caractéristique des lignes géodésiques des surfaces de révolution, et c'est d'elle qu'il faudra partir en général pour trouver les équations de ces lignes; elle exprime qu'en chacun des points d'une de ces lignes, *le produit de la distance de ce point à l'axe de la surface, par le cosinus de l'angle que fait en ce point la ligne géodésique avec le parallèle, est constant.*

Proposons-nous comme application de trouver les lignes géodésiques du cône de révolution. On aura pour l'équation différentielle des lignes géodésiques du cône :

$$d\theta = \pm \frac{k\,dr \sqrt{1 + f'^2(r)}}{r\sqrt{1 - k^2}},$$

Soit β l'angle au sommet du cône, on a :

$$z = r \operatorname{cotg} \beta,$$

donc :

$$f(r) = r \operatorname{cotg} \beta,$$

et

$$f'(r) = \operatorname{cotg} \beta;$$

par suite :

$$\sin \beta \, d\theta = \frac{\pm k dr}{r\sqrt{r^2 - k^2}} = \frac{\mp d \cdot \frac{k}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{r}\right)^2}},$$

d'où on déduit :

$$\operatorname{arc} \cos \frac{k}{r} = \sin \beta \, (\theta - \theta_0),$$

$$\frac{k}{r} = \cos \{ (\theta - \theta_0) \sin \beta \},$$

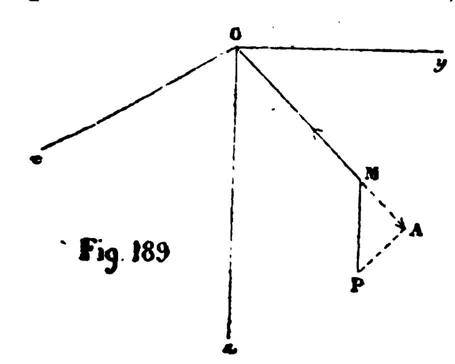
$$r = \frac{k}{\cos [(\theta - \theta_0) \sin \beta]}.$$

On déterminera les constantes k et θ_0, en écrivant que la ligne géodésique passe par deux points donnés.

CHAPITRE XV

APPLICATION AU MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE.

116. Considérons un pendule simple formé par un point matériel pesant M, de masse m, suspendu à un point fixe O, par l'intermédiaire d'un fil OM; si, après avoir écarté ce pendule de la verticale Oz, on imprime au point M une vitesse qui ne soit pas contenue dans le plan zOM, ce pendule se déplacera en tournant autour de la verticale, en s'éloignant et en se rapprochant alternativement de cette verticale; ce sera ce qu'on appelle un pendule conique. Le point matériel M pourra être considéré comme assujetti à rester sur la surface d'une sphère, ayant le point O pour centre, et pour rayon la longueur $l =$ OM du pendule; la réaction de la surface sera remplacée par la tension du fil.



Nous supposerons l'axe Oz vertical et dirigé vers le bas; nous prendrons des coordonnées polaires r et θ sur le plan xOy, de manière que les coordonnées du point M seront z, r et θ. On aura :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2; \quad x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta,$$
$$z^2 + r^2 = l^2.$$

Le principe des forces vives donnera :

$$v^2 = 2gz + c'.$$

Celui des aires a lieu sur le plan xOy; on aura donc :

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c.$$

D'après ce que nous avons dit précédemment, les constantes c et c' auront pour valeurs :

$$(\alpha) \qquad c = r_0 v_0 \cos \alpha_0,$$

$$(\beta) \qquad c' = v_0^2 - 2gz_0.$$

On a d'ailleurs :

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta + dz^2}{dt^2}.$$

Donc, en somme, nous avons les équations :

$$(1) \qquad r^2 = l^2 - z^2,$$

$$(2) \qquad d\theta = \frac{cdt}{r^2},$$

$$(3) \qquad \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gz + c'.$$

On tire de (3), en y remplaçant $d\theta$ et r par leurs valeurs (2) et (1) :

$$(\mathrm{A}) \qquad dt = \frac{\pm\, l dz}{\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}};$$

(2) donne ensuite :

$$(\mathrm{B}) \qquad d\theta = \frac{\pm\, c\, l dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2}}.$$

On prendra dans ces formules le signe + quand le mobile descendra, c'est-à-dire quand z croîtra, et le signe — dans le cas contraire.

Les formules (A) et (B) résolvent le problème; on ne peut

intégrer sans le secours des intégrales elliptiques, mais on est ramené aux quadratures, et on peut discuter, comme nous le verrons tout à l'heure.

117. Discussion. — Posons :

(4) $$\varphi(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2,$$

et nous aurons :

(5) $$dt = \frac{\pm l dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

Cherchons à séparer les racines de l'équation $\varphi(z) = 0$; remarquons d'abord que l'on doit avoir : $\varphi(z_0) > 0$; autrement $\frac{dz}{dt}$ serait imaginaire pour $z = z_0$ et pour les valeurs voisines; on peut du reste le constater; on a en effet :

$$\varphi(z_0) = (2gz_0 + c')(l^2 - z_0^2) - c^2,$$

ou bien, en remplaçant c et c' par leurs expressions (α) et (β), et $l^2 - z_0^2$ par r_0^2 :

(6) $$\varphi(z_0) = v_0^2 r_0^2 - v_0^2 r_0^2 \cos^2 \alpha_0 = v_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0.$$

On trouve ensuite :

$$\varphi(-\infty) = +\infty; \quad \varphi(-l) < 0; \quad \varphi(z_0) > 0;$$
$$\varphi(+l) < 0 \left\{ \begin{array}{l} \varphi(-l) = -c^2. \\ \varphi(+l) = -c^2. \end{array} \right.$$

Donc, l'équation $\varphi(z) = 0$, qui est du troisième degré, a ses trois racines réelles et comprises, la première entre $-\infty$ et $-l$, la seconde entre $-l$ et z_0, et la troisième entre z_0 et $+l$.

Soit $-\gamma$ la racine négative plns grande que l, en valeur absolue, α et β les deux autres racines, $\beta < \alpha$; on aura :

(7) $$\varphi(z) = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma),$$

(A') $$\sqrt{2g}\, dt = \frac{\pm l dz}{\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma)}}.$$

$z + \gamma$ étant toujours positif, à cause de $\gamma > l$, on voit que pour que l'expression de dt soit réelle, z devra toujours être compris entre β et α; β est le minimum de z, α le maximum.

Supposons que, à partir de z_0, z aille d'abord en croissant, il croîtra jusqu'à α, puis décroîtra jusqu'à β pour croître ensuite jusqu'à α. Si nous considérons les petits cercles horizontaux de la sphère, répondant : CA à $z = \alpha$, DB à $z = \beta$, la courbe sphérique décrite par le point M sera comprise tout entière entre ces petits cercles, qu'elle touchera, le premier aux points A et A′, le second en B. La formule (B) nous donnera :

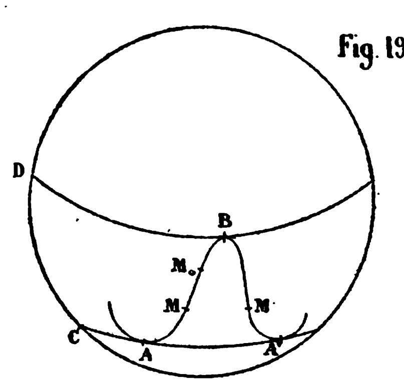


Fig. 190

$$\text{(B}'\text{)} \qquad d\theta \sqrt{2g} = \pm \frac{c\, l\, dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(a - z)(z - \beta)(z + \gamma)}}.$$

Il est évident que la trajectoire se composera d'une infinité de parties égales à ABA′; car, pour deux de ces parties, dans les formules (A′) et (B′), z reçoit les mêmes valeurs. Il y a plus, les deux arcs AB et BA′ sont symétriques, relativement au plan vertical mené par le point B et par le centre de la sphère, et ces deux arcs sont parcourus de la même manière. Soient en effet M et M′ deux points correspondants de ces arcs situés à la même hauteur. Le temps t' que met le mobile pour aller de M en B, est donné par la formule :

$$t'\sqrt{2g} = \int_z^\beta \frac{-dz}{\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma)}} = \int_\beta^z \frac{dz}{\sqrt{(\alpha - z(z - \beta)(z + \gamma)}};$$

le temps t'' qu'il emploie pour aller de B en M' est donné par la même formule.

On verra de même en partant de la formule (B') que, si l'on désigne par θ' et θ'' les angles décrits par le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan xOy, quand le mobile va de M en B et de B en M', on a :

$$\frac{\theta' \sqrt{2g}}{cl} = \int_z^\beta \frac{-dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma)}}$$
$$= \int_\beta^z \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma)}},$$

et que θ'' a la même valeur.

Nous allons calculer l'angle Θ décrit par le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan xOy, quand le mobile passe d'un maximum au minimum suivant, ou inversement.

Remarquons d'abord que l'équation $\varphi(z) = 0$ peut s'écrire :

$$z^3 + \frac{c'}{2g} z^2 - l^2 z + \frac{c^2 - c' l^2}{2g} = 0;$$

les racines de cette équation étant $\alpha, \beta, -\gamma$, on a les relations :

$$\alpha + \beta - \gamma = \frac{-c'}{2g},$$
$$\alpha\beta - \gamma(\alpha + \beta) = -l^2,$$
$$\alpha\beta\gamma = \frac{c^2 - c' l^2}{2g},$$

d'où l'on tire :

(8) $$\gamma = \frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta},$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{c^2}{2g} + l^2(\alpha + \beta - \gamma),$$

et, en éliminant γ :

(9) $$c^2 = 2g \frac{(l^2 - \alpha^2)(l^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta};$$

les formules (A′) et (B′) pourront s'écrire en vertu de (8) et (9) comme il suit :

$$(A'') \quad \sqrt{\frac{2g}{(\alpha+\beta)}}\,dt = \pm \frac{l\,dz}{\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha+\beta)z + l^2 + \alpha\beta]}},$$

$$(B'') \quad d\theta = \pm \frac{\sqrt{(l^2 - \alpha^2)(l^2 - \beta^2)}\,l\,dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha+\beta)z + l^2 + \alpha\beta]}};$$

on en déduira :

$$(10) \quad \Theta = l\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta^2)}\int_\beta^\alpha \frac{dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}\sqrt{(\alpha+\beta)z+l^2+\alpha\beta}}.$$

M. Puiseux a démontré d'une manière générale (Liouville, tome VII) que cet angle Θ est toujours supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Voici sa démonstration : lorsque z varie de β à α, l'expression

$$(\alpha+\beta)z + l^2 + \alpha\beta,$$

reste comprise entre

$$l^2+2\alpha\beta+\beta^2 = l^2-\alpha^2+(\alpha+\beta)^2 \text{ et } l^2+2\alpha\beta+\alpha^2 = l^2-\beta^2+(\alpha+\beta)^2;$$

si donc on désigne par μ une moyenne entre $\sqrt{l^2+2\alpha\beta+\beta^2}$ et $\sqrt{l^2+2\alpha\beta+\alpha^2}$, la formule (10) donnera :

$$\Theta = \frac{\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta^2)}}{\mu}\int_\beta^\alpha \frac{l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}}.$$

Or, on trouve [1] :

$$(11) \quad \int_\beta^\alpha \frac{l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)}} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}} + \frac{1}{\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)}}\right\},$$

[1] La formule (11) peut être démontrée de la manière suivante : Changeons de variable et posons :

$$\mathrm{tg}^2\zeta = \frac{z-\beta}{\alpha-z},$$

il en résulte :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)} + \sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}}{\mu}.$$

En remplaçant μ successivement par ses deux limites données plus haut, et faisant :

$$P = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)} + \sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}}{\sqrt{l^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)} + \sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}}{\sqrt{l^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}},$$

---

ou bien :

$$\frac{s-\beta}{\sin^2\zeta} = \frac{\alpha - s}{\cos^2\zeta} = \alpha - \beta;$$

d'où :

$$s = \alpha \sin^2\zeta + \beta\cos^2\zeta,$$

$$ds = 2(\alpha-\beta)\sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta,$$

$$\sqrt{(\alpha - s)(s-\beta)} = (\alpha-\beta)\sin\zeta\cos\zeta.$$

Soit U la valeur de l'intégrale cherchée; on aura :

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2l}{l^2 - s^2} d\zeta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{l+s} + \frac{1}{l-s}\right) d\zeta,$$

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\zeta}{(l+\alpha)\sin^2\zeta + (l+\beta)\cos^2\zeta} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\zeta}{(l-\alpha)\sin^2\zeta + (l-\beta)\cos^2\zeta};$$

or, A et B désignant des quantités positives, on a :

$$\int \frac{d\zeta}{A\sin^2\zeta + B\cos^2\zeta} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\operatorname{tg}\zeta\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{A}{B}}\operatorname{tg}\zeta\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\operatorname{tg}\zeta\right) + \text{const.},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\zeta}{A\sin^2\zeta + B\cos^2\zeta} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}}.$$

En remplaçant A et B d'abord par $l+\alpha$ et $l+\beta$, puis par $l-\alpha$ et $(l-\beta)$, on trouve :

$$U = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)}} + \frac{1}{\sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}}\right\},$$

ce qui est bien la formule (11).

on aura :

$$P < \Theta < Q;$$

or, à cause de l'identité :

$$\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)} + \sqrt{(l-\alpha)(l-\beta)}$$
$$= \sqrt{(l+\alpha)(l+\beta) + (l-\alpha)(l-\beta) + 2\sqrt{(l+\alpha)(l+\beta)} \times \sqrt{l-\alpha)(l-\beta)}}$$
$$= \sqrt{2l^2 + 2\alpha\beta + 2\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta^2)}}.$$

On peut écrire les expressions de P et Q comme il suit :

$$P = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{(l^2-\alpha^2) + 2\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta^2)}}{(l^2-\beta^2) + (\alpha+\beta)^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{(l^2-\beta^2) + 2\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta)^2}}{(l^2-\alpha^2) + (\alpha+\beta)^2}},$$

et à cause de

$$l^2 - \alpha^2 > 0, \quad l^2 - \beta^2 > 0$$

il en résultera :

$$P > \frac{\pi}{2}; \quad Q > \frac{\pi}{2}.$$

Donc, Θ qui est compris entre P et Q, sera lui-même plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

118. Projection de la courbe sphérique sur le plan horizontal. — Considérons la projection de la courbe sur le plan horizontal xOy; les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe sont r et θ; on aura pour déterminer cette courbe les équations :

$$(12) \qquad r = \sqrt{l^2 - z^2},$$

$$(13) \qquad d\theta = \pm\sqrt{(l^2-\alpha^2)(l^2-\beta^2)}\,\frac{l\,dz}{\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)[z(\alpha+\beta)+l^2+\alpha\beta]}}.$$

En éliminant z, on aurait l'équation différentielle de la

courbe cherchée; mais il vaut mieux garder les équations précédentes. Soient r' et r'' les rayons des petits cercles de la sphère, qui répondent à $z = \alpha$ et $z = \beta$, on aura :

$$r' < r < r''.$$

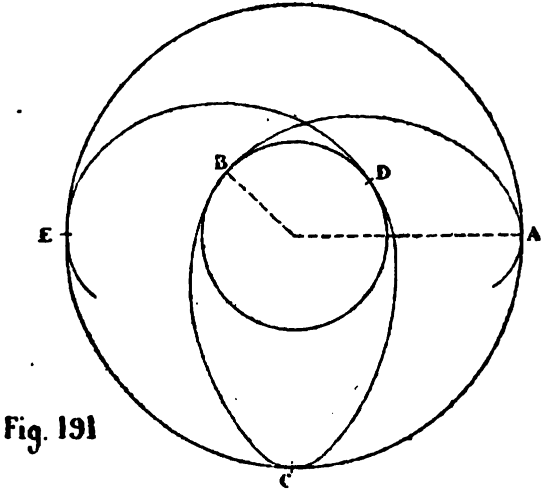


Fig. 191

La courbe sera tout entière comprise entre les circonférences OB et OA :

$$OB = r', \; OA = r''.$$

Soit V l'angle formé par la tangente à la courbe en un point quelconque avec le prolongement du rayon vecteur, on a :

$$\operatorname{tg} V = \frac{r d\theta}{dr},$$

en remplaçant r et θ par leurs valeurs (12) et (13), on trouve :

$$\operatorname{tg} V = \mp \frac{l \sqrt{(l^2 - \alpha^2)(l^2 - \beta^2)}}{z \sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[z(\alpha + \beta) + l^2 + \alpha\beta]}}.$$

On voit que, pour $z = \alpha$ ou pour $z = \beta$, $V = 90°$, donc la courbe est tangente aux deux circonférences aux points A et B.

D'après ce qui a été démontré, l'angle AOB est supérieur à 90°. Si cet angle s'était trouvé égal à 90°, la courbe se serait fermée au bout d'un tour.

Cherchons quelles doivent être les conditions initiales pour que le mobile décrive un cercle horizontal de la sphère, autrement dit pour que le pendule décrive un cône de révo-

lution, ayant pour axe la verticale menée par son point de suspension. Il est clair qu'il faut pour cela que les deux valeurs limites α et β entre lesquelles z oscille, deviennent égales toutes deux à z_0; il faut donc écrire que l'équation $\varphi(z) = 0$ a deux racines égales à z_0, c'est-à-dire que l'on a .

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) = 0.$$

On a :

$$\varphi(z) = (2gz + c')(l^2 - z^2) - c^2,$$

ou bien, en remplaçant c et c' par leurs valeurs (1) et (2) et l^2 par $z_0^2 + r_0^2$:

$$\varphi(z) = \{ v_0^2 + 2g(z - z_0) \} (r_0^2 + z_0^2 - z^2) - r_0^2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0,$$
$$\varphi'(z) = 2 \{ g(r_0^2 + z_0^2 - z^2) - z[v_0^2 + 2g(z - z_0)] \},$$

d'où :

$$\varphi(z_0) = r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0 = 0,$$
$$\varphi'(z_0) = 2(gr_0^2 - z_0 v_0^2) = 0.$$

On tire de là :

$$\alpha_0 = 0, \quad v_0 = r_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

La vitesse initiale doit donc être horizontale et avoir la grandeur trouvée ci-dessus. La formule

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c = r_0 v_0 \cos \alpha_0 = r_0 v_0$$

nous donne ensuite, à cause de $r = r_0$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

d'où, θ_0 désignant la valeur initiale de θ :

$$\theta - \theta_0 = t \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

ce qui montre que le mouvement du pendule est uniforme,

et qu'il met un temps égal à $2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$ pour faire un tour entier autour de la verticale.

On peut résoudre directement la même question; la formule :

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

nous montre que z étant toujours égal à z_0, v est toujours égal à v_0; ainsi, les conditions initiales doivent être telles que le mobile soumis à l'action de son poids MP, et de la tension MN du fil, et par conséquent rendu libre, décrive un cercle d'un mouvement uniforme; il faudra donc que la résultante MA de ces deux forces soit dirigée vers le centre du cercle, et soit égale à $\frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2}{r_0}$.

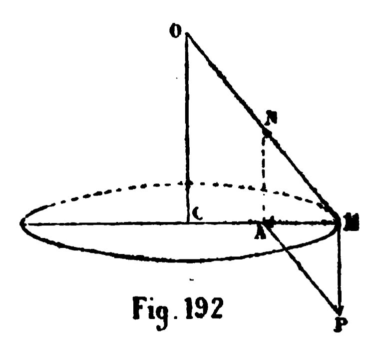


Fig. 192

On en conclut :

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MC}{OC} = \frac{r_0}{z_0}; \quad \frac{v_0^2}{gr_0} = \frac{r_0}{z_0},$$

d'où :

$$v_0 = r_0\sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

la vitesse v étant toujours horizontale, il en sera de même de v_0; on retrouve donc bien les conditions énoncées ci-dessus.

119. Calcul de la tension du fil. — Soit M un point quelconque de la trajectoire du mobile; la normale à la surface en ce point est le rayon MO; soit MT la tangente à la courbe; par cette tangente et la normale MO faisons

passer un plan qui coupe la sphère suivant un grand cercle; la formule générale

$$N = \frac{mv^2}{R} + Q,$$

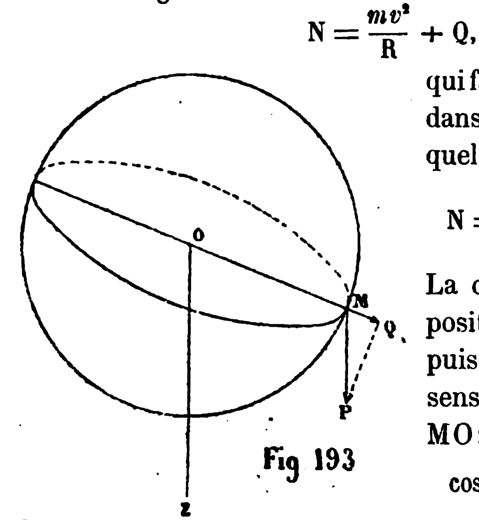


Fig 193

qui fait connaître la pression dans le cas d'une surface quelconque, donne ici :

$$N = \frac{mv^2}{l} + mg \cos PMQ.$$

La composante Q est bien positive dans le cas actuel, puisqu'elle est dirigée en sens contraire du rayon MO; on a :

$$\cos PMQ = \cos ZOM = \frac{z}{l}.$$

Donc :

$$N = \frac{mv^2}{l} + \frac{mgz}{l},$$

$$N = \frac{m}{l}(v^2 + gz),$$

or :

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

donc :

$$N = \frac{mg}{l}\left(\frac{v_0^2}{g} + 3z - 2z_0\right).$$

N est maximum pour $z = \alpha$, minimum pour $z = \beta$.

120. Autre manière de déterminer N. — Les équations du mouvement du point M soumis aux forces mg et N, et par conséquent rendu libre, sont :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{N}{m} \cdot \frac{x}{l}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{N}{m} \cdot \frac{y}{l}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{N}{m} \cdot \frac{z}{l} + g. \end{aligned} \right.$$

On en tire :

$$(15)\quad x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}-gz=-\frac{N}{m}\frac{x^2+y^2+z^2}{l}=-\frac{N}{m}l.$$

Or on a : $x^2+y^2+z^2=l^2$; on en conclut :

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=0,$$

d'où :

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}=-v^2.$$

On a donc, en portant dans (15) :

$$-v^2-gz=-\frac{N}{m}l,$$

$$N=\frac{m}{l}(v^2+gz),$$

comme ci-dessus.

121. Cas des petites oscillations. — Nous supposerons que le pendule ne fasse que de très petites oscillations, de part et d'autre de la verticale, ce qui exige que la position initiale soit très voisine de cette verticale, et que la vitesse initiale v_0 soit très petite.

Nous aurons les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{N}{m}\dfrac{x}{l}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{N}{m}\dfrac{y}{l}, \end{cases}$$

où N a la valeur :

$$(2)\quad N=\frac{mg}{l}\left\{\frac{v_0^2}{g}+3z-2z_0\right\}.$$

On a du reste :

$$z=l\left(1-\frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où, en série très convergente, puisque $\frac{x}{l}$ et $\frac{y}{l}$ sont très petits :

$$z = l - \frac{x^2 + y^2}{2l} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{8l^3} \ldots,$$

on aura une équation analogue en remplaçant l, x, y, z respectivement par l_0, x_0, y_0, z_0; (2) donne ensuite :

$$\frac{N}{m} = g + g \left\{ \frac{v_0^2}{gl} - \frac{3(x^2 + y^2)}{2l^2} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{l^2} \ldots \right\}.$$

On a donc, en négligeant les petites quantités du second ordre, v_0^2, x_0^2, y_0^2, x^2, y^2 :

$$N = g,$$

et alors, les équations (1) donnent :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-g}{l} x; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-g}{l} y,$$

d'où en intégrant :

$$x = A \cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B \sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$y = A' \cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B' \sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

On déduit de ces équations :

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dx}{dt} = - A \sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + B \cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dy}{dt} = - A' \sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + B' \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Nous supposerons que l'on ait pour $t = 0$:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

ce qui revient à faire passer le plan zOx par l'un des points

les plus élevés ou les plus bas ; il en résultera :

$$x_0 = A; \quad 0 = A',$$
$$0 = B; \quad \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 = B'.$$

Donc :

$$(3) \quad \begin{cases} x = x_0 \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}, \\ y = \sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \sin t\sqrt{\frac{g}{l}}. \end{cases}$$

La durée T de la révolution est égale à $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. On déduit des équations précédentes :

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2 l}{g}} = 1.$$

La courbe décrite a donc pour projection une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

Pour avoir une approximation plus élevée, il faudrait prendre :

$$\frac{N}{m} = g + g\left[\frac{v_0^2}{gl} - \frac{3(x^2+y^2)}{2l^2} + \frac{x_0^2}{l^2}\right],$$

en y remplaçant x et y par leurs valeurs (3) fournies par la première approximation, on aurait ainsi :

$$\frac{N}{m} = g + g\frac{x_0^2}{l^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \frac{v_0^2}{l}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

En portant cette valeur dans les équations (1), elles deviendront :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = -\frac{x_0}{l}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\left[g\frac{x_0^2}{l^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \frac{v_0^2}{l}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y=-\frac{v_0}{\sqrt{gl}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}\left[\frac{gx_0^2}{l^2}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{v_0^2}{l}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right].$$

On aura donc à intégrer deux équations linéaires à coefficients constants et avec seconds membres. On peut ainsi prouver qu'à la deuxième approximation la courbe décrite en projection est une ellipse dont le plan tourne autour de la verticale Oz dans le sens du mouvement pendulaire avec une vitesse angulaire constante [1].

[1] Pour le calcul des approximations plus élevées, voir le Mémoire de M. TISSERAND.

CHAPITRE XVI

THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

122. Énoncé du problème. — On connaît la résultante R des forces qui sollicitent un point matériel M de masse m; on sait former les équations différentielles du mouvement absolu de ce point, relativement à trois axes rectangulaires fixes AX, AY, AZ, et on en déduira par l'intégration pour les coordonnées X, Y, Z du mobile à l'époque t :

$$X = F_1(t), \quad Y = F_2(t), \quad Z = F_3(t).$$

Cela posé, considérons un système rigide en mouvement, et soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires liés à ce système; si le mouvement de ce système est connu, on pourra trouver à l'époque t les valeurs des coordonnées du point M par rapport aux axes mobiles,

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Mais on peut demander de trouver ces expressions de x, y, z, c'est-à-dire de déterminer le mouvement relatif, sans passer par la détermination du mouvement absolu; c'est ce dont nous allons nous occuper.

Soit M le point du système où passe le mobile à l'époque t; ce point qui est lié invariablement aux axes Ox, Oy, Oz prendra un mouvement absolu qui est ce qu'on appelle le

mouvement d'entraînement du point M. On sait du reste que, lorsqu'un corps est en mouvement, la vitesse d'un quelconque de ses points est à chaque instant la même que si le corps avait une vitesse de translation égale et parallèle à celle d'un point arbitrairement choisi dans le corps, et tournait autour d'un axe passant par ce point, avec une vitesse angulaire déterminée ω; quel que soit le point choisi, la direction de cet axe de rotation sera la même, et aussi la vitesse de rotation ω. Cela posé, le théorème de Coriolis nous apprend que : L'accélération du mouvement absolu est la résultante de trois accélérations :

1° L'accélération du mouvement relatif $\overline{\gamma'}$;

2° L'accélération du mouvement d'entraînement du point M, $\overline{\gamma''}$;

3° L'accélération $\overline{\gamma'''} = 2\omega v \sin(\omega, v)$, v désignant la vitesse relative, et (ω, v) l'angle de cette vitesse relative avec la direction de l'axe instantané qui passe en M; $\overline{\gamma'''}$ est perpendiculaire sur la vitesse relative v et sur l'axe instantané, et relativement au plan de ces deux droites, elle est située du côté où la rotation entraîne la vitesse relative; on peut donc écrire entre ces quatre quantités géométriques la relation :

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma'} + \overline{\gamma''} + \overline{\gamma'''}.$$

On en conclut :

$$\overline{\gamma'} = \overline{\gamma} - \overline{\gamma''} - \overline{\gamma'''}.$$

Soit R la résultante des forces physiques qui agissent sur le mobile; on a :

$$\gamma = \frac{\overline{R}}{m},$$

d'où on conclut :

$$m\overline{\gamma'} = \overline{R} - m\overline{\gamma''} - m\overline{\gamma'''}.$$

Imaginons deux forces fictives, l'une $F_1 = -m\gamma''$;

l'autre $F_2 = -\overline{m\gamma'''}$; joignons-les aux autres forces physiques dont la résultante est $\overline{R}$, et désignons par $\overline{R'}$ la résultante de l'ensemble; nous aurons :

$$\overline{m\gamma'} = \overline{R} + \overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{R'},$$

d'où :

$$\gamma' = \frac{\overline{R'}}{m}.$$

Ainsi, l'accélération du mouvement relatif est dirigée suivant la force R′ et elle est égale au quotient de cette force par la masse du mobile.

C'est là le théorème fondamental rencontré au début de la Dynamique; on peut l'appliquer comme si les axes étaient fixes; mais on voit qu'outre la force $\overline{R}$, il a fallu introduire deux forces fictives. La force F_1 est égale et contraire à celle qui produirait le mouvement d'entraînement; la force F_2 a pour expression $2m\omega v \sin(\omega, v)$; elle est perpendiculaire au plan mené par l'axe instantané et la vitesse relative, et en sens inverse du côté où la rotation entraîne la vitesse relative; on lui donne le nom de *force centrifuge composée*.

Soient X, Y, Z les composantes de la force R relativement aux axes mobiles, et X_1, Y_1, Z_1 celles de la force fictive F_1, X_2, Y_2, Z_2 celles de la force fictive F_2, par rapport aux mêmes axes.

On aura, pour déterminer le mouvement relatif, les équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 + X_2,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1 + Y_2,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1 + Z_2.$$

Après avoir intégré ces équations, on déterminera les

constantes, en écrivant que pour $t = 0$,

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0; \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha_0; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \beta_0;$$
$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \gamma_0,$$

x_0, y_0, z_0 étant les valeurs des coordonnées relatives à l'époque $t = 0$, et v_0, α_0, β_0, γ_0 désignant les grandeurs à la même époque de la vitesse relative et des angles qu'elle fait avec les axes mobiles Ox, Oy, Oz.

Cas particuliers. — La force centrifuge composée est nulle dans les trois cas suivants : 1° quand la vitesse relative est nulle, alors $v = 0$ et $F_2 = 2m\omega v \sin(\omega v) = 0$; c'est le cas de l'équilibre relatif; 2° quand la direction de l'axe instantané se confond avec celle de la vitesse relative, car alors $(\omega, v) = 0$; 3° quand le mouvement des axes est une simple translation, car alors $\omega = 0$.

123. Application au mouvement d'une planète autour du Soleil. — Nous savons que nous pouvons réduire le Soleil et la planète à deux points matériels S et P, de masses M et m; le Soleil est en mouvement; par chacune de ses positions, nous menons des axes rectangulaires Sx, Sy, Sz parallèles aux axes fixes; nous nous proposons de trouver le mouvement relatif de la planète par rapport aux axes mobiles Sx, Sy, Sz; l'accélération γ' du mouvement

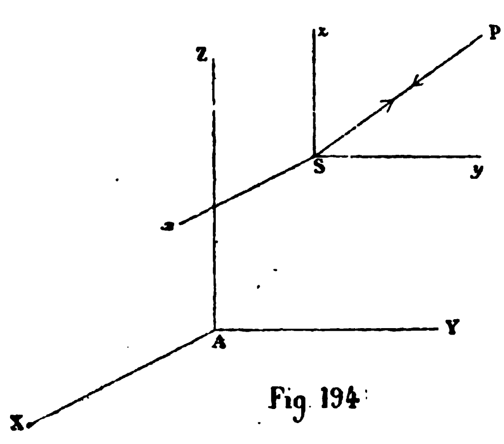


Fig. 194.

d'entraînement est la même que l'accélération du mouvement absolu du Soleil; la force d'attraction de la planète sur le Soleil est dirigée suivant SP, et a pour valeur $\frac{fMm}{r^2}$; on a donc : $\gamma' = \frac{fm}{r^2}$, et cette accélération est dirigée suivant SP; l'attraction du Soleil sur la planète est dirigée suivant PS et égale à $\frac{fMm}{r^2}$; l'accélération γ du mouvement absolu de la planète est donc égale à $\frac{fM}{r^2}$ et dirigée suivant PS; la formule

$$\overline{\gamma'} = \overline{\gamma} - \overline{\gamma'}$$

nous montre donc que l'accélération du mouvement relatif est dirigée suivant PS et égale à

$$\frac{fM}{r^2} + \frac{fm}{r^2} = \frac{f(M+m)}{r^2};$$

elle est la même que si le Soleil était fixe et avait une masse égale à $M + m$. C'est ce que nous avons déjà trouvé d'une autre manière, en partant de la considération des mouvements absolus du Soleil et de la planète.

124. Cas où le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe. — C'est le cas qui se présente le plus souvent dans les applications. Soit AP l'axe de rotation, ω la vitesse angulaire constante de cette rotation; le mouvement d'entraînement du point M consiste à décrire d'un mouvement uniforme le cercle MC dont le plan est perpendiculaire à l'axe; dans ce mouvement l'accélération tangentielle est

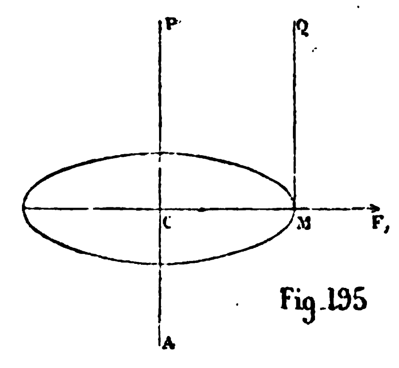


Fig. 135

nulle, puisque la vitesse est constante, par suite $\frac{dv}{dt} = 0$; l'accélération est donc dirigée suivant la normale MC et elle est égale à

$$\frac{v^2}{MC} = \frac{\omega^2 \overline{MC}^2}{MC} = \omega^2 MC = \omega^2 r;$$

la force F_1 est dirigée suivant le prolongement du rayon CM, et elle a pour valeur $F_1 = m\omega^2 r$; on lui donne le nom de *force centrifuge,* à cause de sa direction; mais c'est une force purement fictive. L'axe instantané de la rotation, pour un point quelconque, est parallèle à l'axe fixe, et la vitesse angulaire de la rotation est égale à ω.

125. PROBLÈME. — *Déterminer le mouvement d'un point pesant placé dans l'intérieur d'un tube rectiligne, qui décrit un cône droit autour de la verticale d'un mouvement uniforme.*

Soit OB le tube, M la position du mobile à l'époque t, $OM = s$; comme nous étudions le mouvement relatif du point matériel, il faut introduire les forces fictives $F_1 = m\omega^2 MA = m\omega^2 s.\sin\alpha$; la force F_2 perpendiculaire à la vitesse relative est normale au tube; les autres forces sont : le poids $MP = mg$ et la réaction du tube qui lui est normale; projetons ces forces sur la droite OM, nous aurons :

Fig. 196

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\alpha + m\omega^2 s.\sin\alpha.\sin\alpha;$$

d'où :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\cos\alpha + \omega^2\sin^2\alpha.s.$$

La réaction du tube et la force centrifuge composée n'interviennent pas dans cette équation ; on peut écrire :

$$\frac{d^2\left(s + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right)}{dt^2} = \omega^2 \sin^2 \alpha \left(s + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}\right);$$

en intégrant, il vient :

$$(1) \qquad s + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = A e^{\omega t \sin \alpha} + B e^{-\omega t \sin \alpha},$$

d'où :

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} = \omega \sin \alpha \left[A e^{\omega t \sin \alpha} - B e^{-\omega t \sin \alpha}\right].$$

Pour déterminer les constantes arbitraires, nous supposerons qu'à l'époque initiale $t = 0$, le mobile soit placé en O sans vitesse initiale ; nous devrons avoir pour $t = 0$:

$$s = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0;$$

les équations (1) et (2) donnent :

$$A = B = \frac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \sin^2 \alpha},$$

et il en résulte :

$$s = \frac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \sin^2 \alpha}\left(e^{\frac{\omega t \sin \alpha}{2}} - e^{\frac{-\omega t \sin \alpha}{2}}\right)^2,$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{g}{2\omega} \cot g\, \alpha \left(e^{\omega t \sin \alpha} - e^{-\omega t \sin \alpha}\right).$$

Le mouvement est entièrement connu par ces formules.

On peut avoir aisément l'équation de la projection sur le plan horizontal de la courbe décrite dans le mouvement absolu du point matériel ; soient en effet r et θ les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette projection ; on a :

$$r = s \sin \alpha, \quad \theta = \omega t,$$

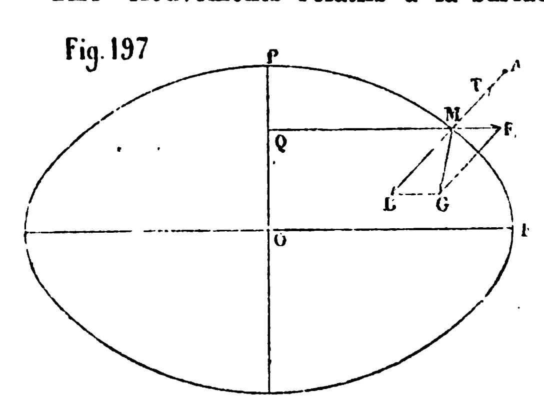
l'équation cherchée est donc :

$$r = \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{cotg} \alpha \left(e^{\theta \sin \alpha} + e^{-\theta \sin \alpha} - 2\right).$$

C'est l'équation d'une spirale.

126. Remarque sur l'extension des théorèmes généraux de la Dynamique aux mouvements relatifs. — On pourra appliquer ces théorèmes, en ayant soin d'avoir égard aux deux forces fictives ; on peut remarquer toutefois que dans l'établissement de l'équation des forces vives, il n'y aura pas à s'inquiéter de la force centrifuge composée, dont le travail est nul, puisqu'elle est constamment normale à la trajectoire relative.

127. Mouvements relatifs à la surface de la Terre. — Considérons d'abord le repos relatif à la surface de la Terre ; soit OP l'axe de rotation de la Terre, ω la vitesse angulaire de rotation, AM un pendule, A le point fixe, M le point matériel. Les forces physiques qui agissent sur ce point sont : la tension MT du fil, dirigée suivant MA, et l'attraction MB. Pour avoir le repos relatif, il faut introduire la force fictive MF_1 dirigée suivant le prolongement du rayon MQ du parallèle du point M. On a :



$$MF_1 = M\omega^2 . MQ = m\omega^2 r.$$

Les trois forces MT, MF_1, MB doivent se faire équilibre ;

donc MT sera égale et opposée à la résultante MG de l'attraction et de la force centrifuge. Ainsi, la direction du fil ne sera pas celle de l'attraction; la pesanteur apparente sera représentée en grandeur et en direction par MG; toutefois, cette pesanteur apparente diffèrera peu de l'attraction, parce que ω est petit; en effet, la Terre tourne sur elle-même en un jour sidéral, c'est-à-dire en 86 164 secondes de temps moyen; on a donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 0{,}000\,072\,9.$$

La plus grande valeur de l'accélération due à la force centrifuge, ωr, a lieu à l'équateur, où on la trouve égale à $0^m{,}033\,852$; si on compare cette accélération à celle qui est due au poids du corps, et que nous avons représentée par g, on trouve qu'elle est environ 289 fois plus petite que cette dernière accélération. Ainsi, la force centrifuge est très petite, par rapport à la pesanteur apparente et par suite par rapport à l'attraction. La rotation de la Terre sur elle-même n'a donc qu'une influence assez faible sur l'intensité de la pesanteur, et sur la direction de la verticale. On a : $289 = 17^2$, de sorte que, si la Terre tournait 17 fois plus vite, la force centrifuge à l'équateur serait égale à l'attraction et, par suite, à l'équateur le poids apparent d'un corps se réduirait à zéro.

Dans les mouvements relatifs terrestres, nous avons à considérer trois forces : l'attraction G et les forces fictives F_1 et F_2; dans les limites des petits mouvements terrestres G et F_1 sont constantes en grandeur et en direction. On pourra remplacer G et F_1 par leur résultante, qui sera constante en grandeur et en direction; cette direction sera celle de la verticale; nous n'aurons donc plus qu'à considérer la force centrifuge composée.

128. Calcul des composantes de la force centrifuge composée. — Soient O un point de la surface de la Terre, OP la parallèle menée par ce point à la partie nord de l'axe de rotation, OA la parallèle à la vitesse relative v, OB la direction de la force centrifuge composée, perpendiculaire sur le plan AOP, et en sens contraire de celui où la rotation directe autour de OP entraîne la vitesse relative OA; soit θ l'angle AOP. Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, liés à la Terre, et tels que, pour un observateur couché le long de Oz, les pieds en O, et la tête en z, et regardant Ox, l'axe Oy soit à la droite de cet observateur. Soient :

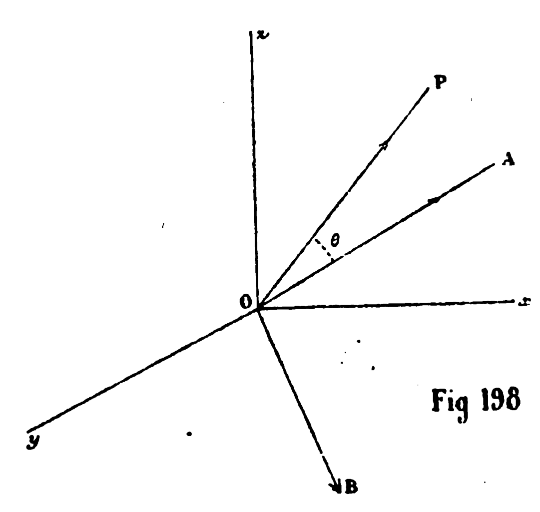


Fig 198

a, b, c	les cosinus des angles	de	OP	avec les axes.
a', b', c'	—	—	OA	—
a'', b'', c''	—	—	OB	—

On aura :

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

d'où :

$$\frac{a''}{bc' - cb'} = \frac{b''}{ca' - ac'} = \frac{c''}{ab' - ba'}$$
$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Or :

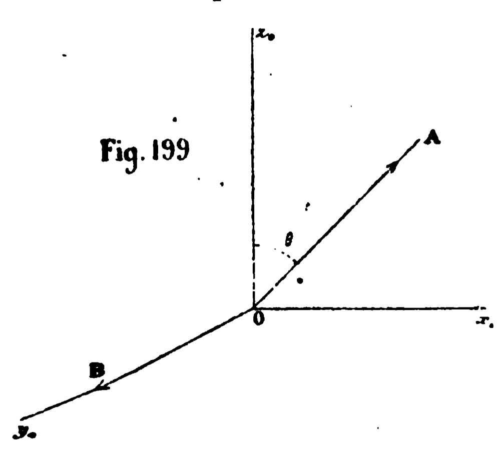
$$\Sigma (bc' - cb')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$
$$= 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta,$$

il viendra donc :

$$(1) \quad a'' = \pm \frac{bc' - cb'}{\sin\theta}; \quad b'' = \pm \frac{ca' - ac'}{\sin\theta}; \quad c'' = \pm \frac{ab' - ba'}{\sin\theta}.$$

Reste à savoir le signe qu'il faut prendre, et qui est du reste le même dans les trois formules.

Considérons pour le moment un nouveau système d'axes rectangulaires Ox_0, Oy_0, Oz_0, disposé comme le précédent, pouvant par conséquent coïncider avec lui; faisons coïncider Oz_0 avec OP, et le plan $z_0\, Ox_0$ avec le plan AOP; la rotation ayant lieu de y_0 vers z_0, entraîne la vitesse relative OA du côté du plan $z_0\, Ox_0$ opposé à Oy_0; donc la force centrifuge composée OB sera dirigée suivant Oy_0; on aura dans ce cas :



$$a_0 = 0, \quad \left\{ a'_0 = \sin\theta, \right. \quad \left\{ a''_0 = 0, \right.$$
$$b_0 = 0, \quad \left\{ b'_0 = 0, \right. \quad \left\{ b''_0 = +1, \right.$$
$$c_0 = +1, \quad \left\{ c'_0 = \cos\theta, \right. \quad \left\{ c''_0 = 0. \right.$$

La seconde des formules (1) donnera :

$$+1 = \pm \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = \pm 1;$$

il faut donc, dans ce cas, prendre les signes supérieurs, et

l'on a :

$$(2)\quad a''_0 = \frac{b_0 c'_0 - c_0 b'_0}{\sin\theta};\quad b''_0 = \frac{c_0 a'_0 - a_0 c'_0}{\sin\theta};\quad c''_0 = \frac{a_0 b'_0 - b_0 a'_0}{\sin\theta}.$$

Je dis que le signe, une fois choisi, se conserve et qu'on aura, dans tous les cas :

$$(3)\qquad a'' = \frac{bc' - cb'}{\sin\theta};\quad b'' = \frac{ca' - ac'}{\sin\theta};\quad c'' = \frac{ab' - ba'}{\sin\theta}.$$

En effet, si nous déplaçons d'une manière continue notre nouveau système d'axes, les cosinus abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ des angles qu'ils forment avec les directions OP, OA, OB, varieront d'une manière continue; si le signe commun des seconds membres des équations (3) venait à changer, c'est que $a''b''c''$ se seraient annulés tous les trois, ce qui est impossible, puisque l'on a $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$. On pourra ainsi amener le nouveau système d'axes à coïncider avec l'ancien. Donc, les formules (3) ont toujours lieu.

Soient maintenant p, q, r les projections de la rotation ω sur Ox, Oy, Oz. On aura :

$$a = \frac{p}{\omega};\quad b = \frac{q}{\omega};\quad c = \frac{r}{\omega};$$

$$a' = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt};\quad b' = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt};\quad c' = \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

Il en résulte que l'on a, sans ambiguïté :

$$a'' = \frac{1}{\omega v \sin\theta}\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$b'' = \frac{1}{\omega v \sin\theta}\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$c'' = \frac{1}{\omega v \sin\theta}\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Donc :

$$X_1 = 2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$
$$Y_1 = 2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$
$$Z_1 = 2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Nous choisirons de la manière suivante les axes Ox, Oy, Oz :

Oz vertical, et dirigé vers le haut;
Ox horizontal, dirigé vers le nord;
Oy horizontal, dirigé vers l'est.

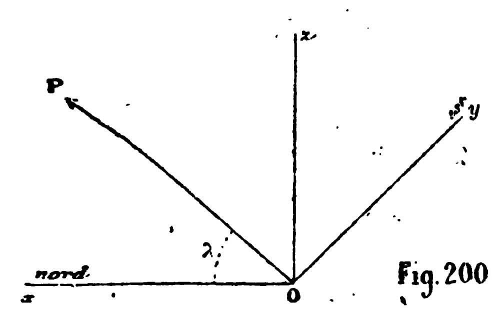


Fig. 200

Ces axes auront bien la disposition que nous avons supposée. L'angle POx, ou la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon du lieu, sera égal à la latitude du lieu λ.

On aura :

$$p = \omega\cos\lambda; \quad q = 0; \quad r = \omega\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \omega\sin\lambda,$$

et par conséquent :

$$X_1 = -2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$
$$Y_1 = 2m\omega\left(\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \cos\lambda\frac{dz}{dt}\right),$$
$$Z_1 = 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}.$$

129. Application au mouvement relatif des projectiles en négligeant la résistance de l'air. — Les équations du

mouvement seront :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\lambda \dfrac{dx}{dt} - \cos\lambda \dfrac{dz}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega \cos\lambda \dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

On peut intégrer une première fois; nous supposerons qu'on ait pris pour origine la position initiale du projectile, et nous désignerons par a, b, c les valeurs initiales de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; nous aurons :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - 2\omega \sin\lambda . y, \\ \dfrac{dy}{dt} = b + 2\omega(x \sin\lambda - z \cos\lambda), \\ \dfrac{dz}{dt} = c - gt + 2\omega \cos\lambda . y. \end{cases}$$

On a là un système de trois équations linéaires simultanées, avec seconds membres; on pourrait les intégrer aisément; mais les formules que l'on obtiendrait ainsi seraient assez compliquées, et d'un emploi peu commode. Il est préférable d'effectuer les intégrations par approximation, en partant de ce que ω est très petit; dans une première approximation, en négligeant ω, nous aurons :

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = at, \\ y_1 = bt, \\ z_1 = ct - \dfrac{1}{2} gt^2. \end{cases}$$

Nous aurons la seconde approximation en remplaçant dans les seconds membres des équations (3) x, y, z par x_1, y_1, z_1,

ce qui donnera :

$$\frac{dx}{dt} = a - 2\omega\, b \sin\lambda . t,$$

$$\frac{dy}{dt} = b + 2\omega \left(a \sin\lambda . t - c \cos\lambda . t + \frac{1}{2} g \cos\lambda . t^2\right),$$

$$\frac{dz}{dt} = c - gt + 2\omega\, b \cos\lambda . t.$$

On en déduira, pour la seconde approximation :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= at - b\omega \sin\lambda . t^2, \\ y_2 &= bt + \omega\,(a \sin\lambda - c\cos\lambda)\, t^2 + \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda . t^3, \\ z_2 &= ct - \frac{1}{2} gt^2 + b\omega \cos\lambda t^2. \end{aligned} \right.$$

On pourrait obtenir aussi facilement l'approximation suivante.

Cas de la chute libre. — On n'aura qu'à faire dans les formules (5) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. On en déduira :

$$(6) \qquad x_2 = 0; \quad y_2 = \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda . t^3; \quad z_2 = -\frac{1}{2} gt^2.$$

Soit h la hauteur de chute; on aura :

$$h = \frac{1}{2} gt^2; \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$y_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega \cos\lambda}{\sqrt{g}} h \sqrt{h}.$$

y_2 étant positif, il y a une petite déviation vers l'est. Appliquons cette formule à des expériences qui ont été faites par M. Reech, dans un puits de mine à Freyberg; on avait : $h = 158^{\text{m}},5$; $\lambda = 51°$; en remplaçant λ et h par ces valeurs, et mettant aussi pour ω et g leurs valeurs, on trouve



$y_1 = 0^m,0276$ pour la déviation à l'est. L'expérience, répétée un grand nombre de fois, a donné pour cette déviation le nombre $0^m,0283$, nombre qui diffère très peu du précédent.

130. Mouvement relatif d'un point pesant assujetti à se mouvoir sur un plan horizontal. — En désignant par N la réaction du plan horizontal, les équations du mouvement seront :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= N - g + 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Or, on doit avoir constamment $z = 0$, d'où $\frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{d^2z}{d^2t} = 0$; il en résulte donc :

$$N = g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}. \tag{9}$$

L'équation (7) donnera la réaction N ; les deux autres peuvent être intégrées rigoureusement, d'une manière très simple ; on en déduit d'abord :

$$dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = v^2 = \text{const.} = v_0^2. \tag{10}$$

Ainsi, la vitesse est constante ; en intégrant ensuite les équations (8) et (9), et désignant par α_0 l'angle que fait

avec Ox la vitesse initiale v_0, il vient :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha_0 - 2\omega \sin \lambda . y, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 + 2\omega \sin \lambda . x; \end{cases}$$

et en portant ces valeurs dans (10), on trouve :

$$\left(\frac{v_0}{2\omega \sin \lambda}\right)^2 = \left(x + \frac{v_0 \sin \alpha_0}{2\omega \sin \lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{v_0 \cos \alpha_0}{2\omega \sin \lambda}\right)^2,$$

ce qui est l'équation d'un cercle, dont le rayon est $\frac{v_0}{2\omega \sin \lambda}$; à la latitude de 30°, ce rayon a pour valeur $\frac{v_0}{\omega_0} = 13698\ v_0$; ainsi, le mobile devrait décrire un cercle d'un très grand rayon, et le décrire d'un mouvement uniforme.

On peut arriver au même résultat d'une manière un peu différente. Les trois forces qui agissent sur le mobile, la pesanteur, la réaction du plan, la force centrifuge composée, étant normales à la trajectoire, leur travail est nul, et le principe des forces vives nous montre que la vitesse est constante; ainsi $v = v_0$; les composantes X_2 et Y_2 de la projection de la force centrifuge composée ont pour expressions :

$$X_2 = -2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}; \quad Y_2 = 2m\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}.$$

Soit α l'angle de la vitesse avec Ox; on a :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha.$$

Il en résulte :

$$(12)\quad \begin{cases} X_2 = 2m\omega\ v_0 \sin \lambda \cos \left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ Y_2 = 2m\omega\ v_0 \sin \lambda \sin \left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ce qui montre que la force motrice fait avec Ox l'angle

$\alpha + \frac{\pi}{2}$, et que l'intensité de cette force est égale à $2m\omega_0 \sin\lambda v_0$; elle est donc normale à la courbe, et constante; mais on sait que la composante normale a pour expression générale $\frac{mv^2}{\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure; on a donc :

$$\frac{mv_0^2}{\rho} = 2m\omega\, v_0 \sin\lambda,$$

d'où :

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega \sin\lambda}.$$

Ainsi, le rayon de courbure est constant; la courbe décrite est donc un cercle. Le temps T employé par le mobile à décrire son cercle sera :

$$T = \frac{2\pi\rho}{v_0} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda}.$$

Soit T′ la durée de la rotation de la Terre sur elle-même; on a :

$$\omega = \frac{2\pi}{T'},$$

il en résulte :

$$T = \frac{T'}{2 \sin\lambda},$$

quantité indépendante de v_0.

Remarque. — Soient OA la direction de la vitesse à un moment quelconque, OB celle de la force centrifuge composée; l'angle AOB est droit, et OB est situé à droite de OA; donc, un corps quelconque en mouvement dans un plan horizontal tend, en vertu de la rotation de la Terre, à dévier vers la droite; l'intensité de la force déviatrice $2m\omega\, v_0 \sin\lambda$ varie de

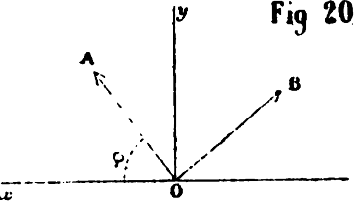
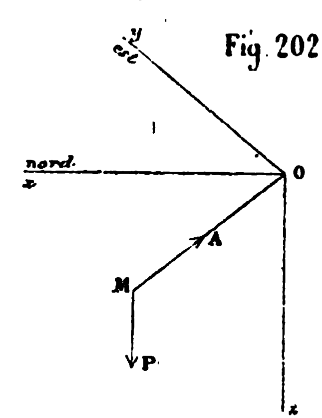


Fig 201

zéro, à l'équateur, à $2m\omega\, v$, qui est son maximum au pôle. Ainsi, un corps en mouvement dans un plan horizontal situé sur l'hémisphère nord a une tendance à dévier à droite de sa vitesse. Les fleuves qui coulent dans l'hémisphère nord, sous des latitudes élevées, exercent en moyenne une plus grande pression sur leur rive droite que sur leur rive gauche; la force qui tend à dévier le fleuve à droite, est $2m\omega\, v \sin \lambda$; elle peut être grande à cause de m; la rive droite sera entamée peu à peu.

131. Pendule de Foucault. — Nous allons étudier les petits mouvements du pendule simple à la surface de la Terre, en tenant compte du mouvement de rotation de la Terre.

Prenons le point de suspension pour origine : soient Ox la portion nord de la méridienne, Oy la perpendiculaire à Ox, dans le plan horizontal, dirigée vers l'est, Oz vertical et dirigé vers le bas. Nous représenterons la tension MA du fil par mN, m désignant la masse du point M; les forces réellement appliquées au point M sont : la pesanteur $MP = mg$ et la force mN; il faut y joindre la force centrifuge composée, dont les composantes seront X_2, Y_2, Z_2; nous aurons ainsi, pour les équations du mouvement, en représentant OM par l :



$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -N\dfrac{x}{l} + \dfrac{X_2}{m}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -N\dfrac{y}{l} + \dfrac{Y_2}{m}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = g - N\dfrac{z}{l} + \dfrac{Z_2}{m}. \end{cases}$$

On déduira les expressions de X_2, Y_2, Z_2, de celles données précédemment, en y changeant z en $-z$, et Z_2 en $-Z_2$, ce qui donnera :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{X_2}{m} &= -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{Y_2}{m} &= 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt} + 2\omega\cos\lambda \frac{dz}{dt}, \\ \frac{Z_2}{m} &= -2\omega\cos\lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (1) deviendront donc :

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + N\frac{x}{l} = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} + N\frac{y}{l} = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} + 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + N\frac{z}{l} - g = 0.$$

On a d'ailleurs :

$$(6)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

Le problème est ramené à la détermination des quatre inconnues x, y, z, N, à l'aide des équations (3), (4), (5) et (6) ; on ne sait pas intégrer rigoureusement ces équations. Nous nous bornerons au cas des petites oscillations ; on tire de (6) :

$$\frac{z}{l} = \left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on aura, en série convergente :

$$\frac{z}{l} = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right] - \frac{1}{8}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right]^2 + \dots$$

Dans le cas des petites oscillations, $\frac{x}{l}$ et $\frac{y}{l}$ sont des quan-

tités petites; $\frac{z}{l}$ diffère de 1 d'une quantité petite du second ordre; il en sera de même de $\frac{d^2z}{dt^2}$ qui ne différera de zéro que de petites quantités du second ordre, $\frac{x}{l}$ et $\frac{y}{l}$ étant considérés comme étant du premier ordre; l'équation (5) donnera donc :

$$N = g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt},$$

et cette valeur sera exacte, aux quantités près du second ordre; les équations (3) et (4) deviendront :

$$(7) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} + \frac{g}{l}x - 2\frac{x}{l}\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} = 0.$$

$$(8) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}y - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - 2\frac{y}{l}\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} = 0.$$

Les quantités négligées dans (7) et (8) sont de l'ordre $\left(\frac{x}{l}\right)^2$ et $\left(\frac{y}{l}\right)^2$; dans ces mêmes équations, les termes en $\omega x \frac{dy}{dt}$, $\omega y \frac{dz}{dt}$, $\omega \frac{dz}{dt}$, sont de l'ordre de $\omega\left(\frac{x}{l}\right)^2$, $\omega\left(\frac{y}{l}\right)^2$; négligeons encore ces quantités et les équations (7) et (8) vont devenir simplement :

$$(A) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega'\frac{dy}{dt} + \frac{g}{l}x = 0,$$

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega'\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}y = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\omega' = \omega \sin\lambda.$$

Pour intégrer, nous déduirons des équations (A) et (B),

multipliées respectivement par 1 et $\sqrt{-1}$ et ajoutées :

$$\text{(C)} \qquad \frac{d^2(x+y\sqrt{-1})}{dt^2} - 2\omega'\sqrt{-1}\,\frac{d(x+y\sqrt{-1})}{dt} + \frac{g}{l}\left(x+y\sqrt{-1}\right) = 0,$$

et cette équation, à elle seule, tiendra lieu des équations (A) et (B). C'est une équation linéaire, à coefficients constants, dont l'intégrale générale sera :

$$\text{(9)} \qquad x + y\sqrt{-1} = \mathrm{A}e^{r't\sqrt{-1}} + \mathrm{B}e^{r''t\sqrt{-1}}.$$

A et B désignant deux constantes arbitraires, r' et r'' étant les racines de l'équation :

$$r^2 - 2\omega'\sqrt{-1}\,r + \frac{g}{l} = 0,$$

donc :

$$r' = (\omega' + h)\sqrt{-1},$$
$$r'' = (\omega' - h)\sqrt{-1};$$

en posant :

$$\text{(D)} \qquad h = \sqrt{\omega'^2 + \frac{g}{l}},$$

il en résulte :

$$\text{(10)} \qquad x + y\sqrt{-1} = \mathrm{A}e^{(\omega'+h)t\sqrt{-1}} + \mathrm{B}e^{(\omega'-h)t\sqrt{-1}},$$

$$\text{(11)} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left\{ \mathrm{A}(\omega'+h)\,e^{(\omega'+h)t\sqrt{-1}} + \mathrm{B}(\omega'-h)\,e^{(\omega'-h)t\sqrt{-1}} \right\}.$$

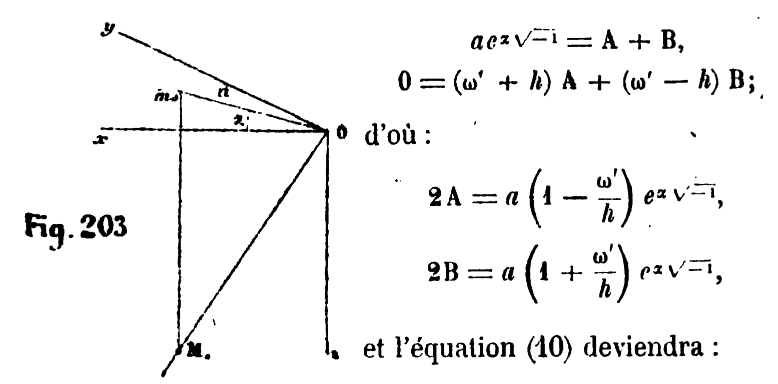
Pour déterminer les constantes arbitraires, nous supposerons que le pendule ait été amené en OM_0, et abandonné à lui-même sans vitesse initiale apparente ; soit m_0 la projection de M_0 sur le plan $x\mathrm{O}y$. Posons :

$$\mathrm{O}m_0 = a, \qquad m_0\mathrm{O}x = \alpha;$$

on devra avoir pour $t = 0$:

$$x = a\cos\alpha, \qquad y = a\sin\alpha; \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

Les équations (10) et (11) donneront :



$$a e^{\alpha\sqrt{-1}} = A + B,$$
$$0 = (\omega' + h)\,A + (\omega' - h)\,B;$$

d'où :

$$2A = a\left(1 - \frac{\omega'}{h}\right) e^{\alpha\sqrt{-1}},$$
$$2B = a\left(1 + \frac{\omega'}{h}\right) e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

et l'équation (10) deviendra :

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{a}{2}\, e^{(\omega' t + \alpha)\sqrt{-1}} \left\{ \left(1 - \frac{\omega'}{h}\right) e^{ht\sqrt{-1}} + \left(1 + \frac{\omega'}{h}\right) e^{-ht\sqrt{-1}} \right\},$$

ou bien :

$$x + y\sqrt{-1} = a\, e^{(\omega' t + \alpha)\sqrt{-1}} \left\{ \cos ht - \frac{\omega'}{h}\sqrt{-1}\sin ht \right\}.$$

Faisons un changement de variables, en posant, ξ et η étant de nouvelles variables réelles :

$$(12) \qquad x + y\sqrt{-1} = e^{(\omega' t + \alpha)\sqrt{-1}} \left(\xi + \eta\sqrt{-1}\right),$$

il en résultera :

$$\xi + \eta\sqrt{-1} = a\left(\cos ht - \frac{\omega'}{h}\sqrt{-1}\sin ht\right),$$

$$(D) \qquad \xi = a\cos ht,$$

$$(E) \qquad \eta = -a\frac{\omega'}{h}\sin ht.$$

On déduit, du reste, de (12) :

$$(F) \qquad x = \xi\cos(\omega' t + \alpha) - \eta\sin(\omega' t + \alpha),$$

$$(G) \qquad y = \xi\sin(\omega' t + \alpha) + \eta\cos(\omega' t + \alpha).$$

La solution générale, dans le cas des petites oscillations, est donc fournie par les équations (D), (E), (F), (G).

Signification géométrique des variables ξ et η. — Concevons un système d'axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$ mobiles, l'axe $O\xi$ faisant avec Om_0 l'angle $\omega' t$, et $O\eta$ faisant avec Om_0 l'angle $90° + \omega' t$; ξ et η seront les coordonnées de la projection du mobile M sur le plan horizontal, coordonnées rapportées aux axes mobiles $O\xi$ et $O\eta$. Des équations (D) et (E), on tire :

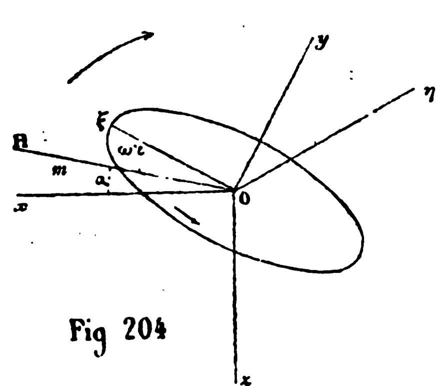


Fig 204

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{a\omega'}{h}\right)^2} = 1.$$

Donc, le pendule décrit une ellipse, et le grand axe de cette ellipse tourne, d'un mouvement uniforme, de x vers y, c'est-à-dire du nord vers l'est, avec la vitesse angulaire $\omega' = \omega \sin \lambda$. Reste à examiner dans quel sens l'ellipse est parcourue. En désignant par r et θ les coordonnées polaires du point m de l'ellipse, rapportées à $O\xi$ et $O\eta$, on tire de (D) et (E) :

$$\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = - a^2 \omega';$$

donc θ décroît sans cesse, et le mouvement sur l'ellipse se fait dans le sens indiqué par la flèche; donc le mouvement du pendule et le mouvement du grand axe de l'ellipse sont de sens contraires. Dans le cas des petites oscillations du pendule conique, au contraire, le grand axe de l'ellipse tourne dans le sens même du mouvement du pendule.

L'ellipse est très aplatie; en effet, son grand axe est $2a$,

son petit axe,

$$\frac{2a\,\omega'}{h} = \frac{2a\,\omega \sin\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \frac{g}{l}}} = \frac{2a\,\omega \sin\lambda}{\sqrt{\frac{g}{l}}}, \text{ sensiblement;}$$

le rapport du petit axe au grand axe est $\dfrac{\omega \sin\lambda}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$.

Dans l'expérience faite par Foucault au Panthéon, on avait :

$$\lambda = 48^\circ 50' 49''; \quad l = 67^m; \quad a = 3^m.$$

On trouve :

$$\frac{\omega \sin\lambda}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \omega \sqrt{\frac{l}{g}} \sin\lambda = 0{,}000\,143,$$

le petit axe où

$$2a\,\omega' \sqrt{\frac{l}{g}} = 0^{mm},86.$$

Ainsi le petit axe avait moins d'un millimètre; le pendule paraissait donc décrire un plan, et ce plan tournait d'un mouvement uniforme. La durée d'une oscillation est $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ $= 8^s$ environ. La durée de la révolution du plan d'oscillation est égale à

$$\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{1^{\text{ j. sid.}}}{\sin\lambda} = 31^{\text{ h.}} 52'.$$

Pendant une double oscillation de 16^s, l'extrémité de la course du pendule se déplaçait de $2^{mm},3$, en vertu du mouvement de rotation du plan d'oscillation; les observations pouvaient donc s'étendre à 5 ou 6 heures, alors la déviation était de 60° à 70°.

A l'équateur, la déviation serait nulle; dans l'hémisphère austral, elle changerait de sens.

QUATRIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

DES

SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

1. Tout corps est considéré comme un système de points matériels agissant les uns sur les autres; l'action qui s'exerce entre deux points matériels M et M′ de masses m et m' agissant à la distance r, consiste en deux forces égales et opposées dirigées suivant MM′ et M′M, appliquées la première au point M, la seconde au point M′; la valeur de chacune d'elles peut être représentée par $mm'\varphi(r)$, $\varphi(r)$ étant une certaine fonction de la distance des deux points. Quand cette double force tend à rapprocher les deux points, on dit qu'il y a attraction; quand elle tend à les éloigner, il y a répulsion. Outre ces forces intérieures qui s'exercent entre les divers points matériels composant le système considéré, des forces extérieures peuvent encore être appliquées à divers points de ce système; ces forces extérieures proviennent des actions exercées sur les points

du premier système par les divers points d'un ou de plusieurs autres systèmes situés à de certaines distances du premier.

Soient m la masse d'un point matériel quelconque du système, x, y, z les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires fixes. Il est clair que le mouvement de chaque point matériel est produit par l'ensemble des forces, tant extérieures qu'intérieures qui agissent sur ce point. Si donc on désigne par F l'une quelconque de ces forces et par X, Y, Z ses composantes, on aura les trois équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum X, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum Y, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum Z, \end{cases}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les forces qui agissent sur le point considéré. On aura trois équations semblables pour chacun des autres points du système; si n est le nombre des points, on aura donc $3n$ équations simultanées à $3n$ inconnues; les seconds membres contiennent toutes les inconnues mêlées; la détermination des mouvements des divers points du système dépendra donc de l'intégration de $3n$ équations différentielles simultanées du second ordre, problème généralement très difficile, et qu'on ne parviendra à résoudre que dans un nombre de cas très restreint. On peut faire avec ces équations certaines combinaisons éliminant les forces intérieures, ce qui donne des équations ou des lois générales du mouvement des systèmes.

2. Mouvement du centre de gravité. — Ajoutons membre à membre toutes les équations (1) relatives à l'axe des x; faisons de même pour celles relatives à l'axe des y et à celui

des z et nous aurons les trois équations suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \sum X, \\ \Sigma m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y, \\ \Sigma m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z. \end{cases}$$

Le signe Σ dans le premier membre s'étend à tous les points du système. Or, les actions mutuelles que les divers points du système exercent les uns sur les autres étant deux à deux égales et opposées, leurs projections sont aussi deux à deux égales et opposées, et par conséquent se détruisent dans les seconds membres des équations (2).

Ainsi, les équations (2) sont indépendantes des forces intérieures et ne dépendent que des forces extérieures. On peut donner à ces équations une forme un peu différente et les écrire :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \Sigma m \dfrac{dx}{dt} = \sum X, \\ \dfrac{d}{dt} \Sigma m \dfrac{dy}{dt} = \sum Y, \\ \dfrac{d}{dt} \Sigma m \dfrac{dz}{dt} = \sum Z. \end{cases}$$

Soit v la vitesse de l'un quelconque M des points du système, dont la masse est m; le produit mv se nomme la *quantité de mouvement* du point. Il convient de considérer ce produit comme une grandeur géométrique portée sur la tangente à la trajectoire du point considéré dans le sens de la vitesse de ce point; ses projections seront $m\dfrac{dx}{dt}$, $m\dfrac{dy}{dt}$, $m\dfrac{dz}{dt}$; on met ainsi en évidence les quantités qui figurent dans les premiers membres des équations (3), et la première

de ces équations donne le théorème suivant (en remarquant que l'axe des x peut être une droite quelconque) :

THÉORÈME. — *La dérivée par rapport au temps de la somme des projections, sur un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement des divers points du système, est égale à la somme des projections des forces extérieures au système sur ce même axe.*

Lorsque les points du système ne sont sollicités par aucune force extérieure, les seconds membres des équations (3) sont nuls, et les sommes des projections des quantités de mouvement ayant leurs dérivées nulles sont constantes. Ainsi :

Lorsque les divers points du système ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, la somme des projections des quantités de mouvement, sur un axe fixe quelconque, est constante.

Le théorème précédent acquiert une signification très simple, quand on fait intervenir le centre de gravité du système des points matériels donnés. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce point. Elles seront définies par les équations :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} Mx_1 &= \Sigma mx, \\ My_1 &= \Sigma my, \\ Mz_1 &= \Sigma mz, \end{aligned}\right.$$

où

$$M = \Sigma m.$$

On en déduit, par différentiation :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} M\frac{dx_1}{dt} &= \Sigma m\frac{dx}{dt}, \\ M\frac{dy_1}{dt} &= \Sigma m\frac{dy}{dt}, \\ M\frac{dz_1}{dt} &= \Sigma m\frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations font connaître à chaque instant la vitesse du

centre de gravité en grandeur et en direction; en fonction des vitesses des divers points du système. En différentiant de nouveau, nous aurons l'accélération du même point par les formules :

$$(6)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m\dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m\dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

En vertu de ces dernières équations, les équations (2) peuvent s'écrire :

$$(7)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z. \end{cases}$$

Ces équations sont celles du mouvement d'un point matériel de masse M sollicité par une force dont les projections sur les axes sont égales respectivement aux sommes des projections de toutes les forces du système. On a donc ce théorème.

Théorème. — *Le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si toute sa masse y était concentrée, et que si toutes les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.*

On voit que le mouvement du centre de gravité ne dépend nullement des forces intérieures, et, par conséquent, qu'il n'est influencé en rien par les changements qui peuvent se produire dans la constitution physique du système, tels que des chocs, des explosions, des ruptures de liens, ..., en tant que ces phénomènes se passent exclusivement entre des corps faisant partie du système considéré.

Cette proposition importante est connue sous le nom de *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*. En particulier, si le système n'est soumis à aucune force extérieure, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme; si sa vitesse initiale est nulle, il reste forcément en repos.

3. Exemples de l'application de ce principe. — 1° Notre système planétaire étant extrêmement éloigné des étoiles, on peut admettre que ses divers points n'en éprouvent aucune action sensible; ce système n'est donc soumis qu'à des actions intérieures, et dès lors le mouvement du centre de gravité du système solaire doit être rectiligne et uniforme; les observations ont mis ce mouvement en évidence.

2° **Recul des bouches à feu.** — Supposons un canon placé sur un plan de glace parfaitement poli; soient M la masse du canon et de son affût, m celle du boulet; le canon et le boulet forment un système dont le centre de gravité G est primitivement immobile. L'explosion de la poudre ne développant que des forces intérieures, le centre de gravité doit rester au repos; si donc, au bout d'un certain temps, la projection sur l'horizon, de l'espace parcouru par le boulet, est x, le centre de gravité du canon et de son affût aura dû parcourir en sens contraire un espace x' tel que l'on ait :

$$Mx' - mx = 0,$$

d'où :

$$x' = \frac{m}{M} x.$$

On aura aussi pour les vitesses :

$$v = \frac{m}{M} v.$$

La vitesse de recul du canon v' est très petite devant celle

du boulet v parce que m est très petit devant M. L'équation précédente n'est toutefois exacte qu'en négligeant la masse de la poudre devant m.

3° **Ascension des fusées.** — L'inflammation progressive de la poudre qui entre dans la composition d'une fusée, projette en dehors des quantités de matière de plus en plus grandes, par un orifice situé à la partie inférieure du corps de la fusée; celui-ci doit donc reculer, c'est-à-dire prendre un mouvement ascensionnel; il est vrai que la pesanteur est une force extérieure qui doit influer sur le phénomène; mais elle ne fait que diminuer la vitesse de la fusée.

4° **Explosion des bombes.** — Quand une bombe fait explosion avant d'avoir touché le sol, le centre de gravité des divers éclats continue à parcourir la parabole suivant laquelle se mouvait le centre de gravité de la bombe entière jusqu'à ce que l'un des éclats vienne toucher le sol. Alors une nouvelle force intervient, la réaction du sol sur le fragment, et cette force modifie nécessairement le mouvement du centre de gravité du système. Il faut toutefois remarquer que le centre de gravité d'une bombe ne décrit pas en réalité une parabole à cause de la résistance de l'air.

5° **Marche de l'homme et des animaux.** — Le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité s'étend aux êtres vivants. La volonté fait naître des actions mutuelles entre les diverses parties de l'organisme; elle met en jeu des actions musculaires; mais ces forces, comme toutes celles de la nature, sont deux à deux égales et opposées, et par conséquent n'ont pas d'influence sur le mouvement du centre de gravité. Aussi n'est-ce qu'en réagissant sur les corps extérieurs qu'un être vivant peut modifier le mouvement de son centre de gravité. Quand un homme veut

commencer à marcher, et qu'il porte une jambe en avant, l'autre jambe tend à reculer d'après le principe en question; elle le ferait, si rien ne s'y opposait, et le centre de gravité du corps n'avancerait pas. Mais la seconde jambe ne peut reculer qu'en glissant sur le sol, et c'est alors que se développe le frottement qui détermine le mouvement en avant du centre de gravité. Un homme placé sur un plan de glace parfaitement poli ne pourrait ni avancer ni reculer.

Remarque. — Lorsque les points du système ne sont soumis qu'à leurs actions mutuelles, on a les équations :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma m \frac{dx}{dt} &= \alpha,\\ \Sigma m \frac{dy}{dt} &= \beta,\\ \Sigma m \frac{dz}{dt} &= \gamma, \end{aligned}\right.$$

α, β, γ désignant trois constantes arbitraires; ce sont là trois *intégrales* du problème.

On peut intégrer les équations (8), après les avoir multipliées par dt; en désignant par α', β', γ' trois nouvelles constantes, on aura :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma\, mx &= \alpha t + \alpha',\\ \Sigma\, my &= \beta t + \beta',\\ \Sigma\, mz &= \gamma t + \gamma'. \end{aligned}\right.$$

On a donc ainsi, dans (8) et (9), six *intégrales* du problème.

4. Théorème des moments des quantités de mouvement. — Des deux premières équations (1) multipliées respectivement par $-y$ et $+x$, on déduit :

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma\,(xY - yX).$$

A chaque point du système correspond une équation sem-

blable; faisons la somme de toutes ces équations, et nous aurons :

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),$$

ou bien :

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=\sum(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=\sum(z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}).\end{aligned}\right.$$

Or, $x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}$ représente le moment de la force X, Y, Z appliquée au point x, y, z relativement à l'axe des z. Les forces intérieures étant égales deux à deux et opposées, il en est de même de leurs moments relativement à une même droite; ainsi les seconds membres des équations (10) ne contiennent que les forces extérieures au système. Si l'on remarque encore que $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ est le moment de la quantité de mouvement du point x, y, z relativement à l'axe des z, on voit que les équations (10) sont la traduction du théorème suivant :

THÉORÈME. — *La dérivée de la somme des moments, par rapport à un axe fixe quelconque, des quantités de mouvement des divers points du système, est égale à la somme des moments des forces extérieures, par rapport au même axe.*

Nous nous occuperons particulièrement du cas où les seconds membres des équations (10) sont nuls; cela aura lieu, d'abord si les forces extérieures sont nulles, ensuite si les forces extérieures se font constamment équilibre sur le système solidifié, ou bien si elles ont une résultante unique passant toujours par l'origine. On a alors, en désignant

par C, C′, C″ trois constantes arbitraires :

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=C'',\\
\Sigma m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=C',\\
\Sigma m\left(z\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=C.
\end{aligned}
\right.
$$

Ce sont trois nouvelles *intégrales* du problème.

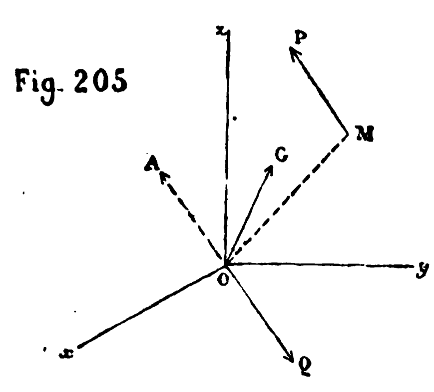
Donc, dans ce cas :

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe quelconque est constante.

C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des moments;* il subsiste, quelles que soient les actions mutuelles qui viendraient à naître entre les divers points du système.

Ce principe peut être énoncé d'une manière différente en se servant de la considération des couples.

Soient M l'un quelconque des points matériels du système, MP la direction de sa vitesse v, sur laquelle nous portons la quantité de mouvement $MP = mv$; considérons MP comme une force; ses projections sur les axes seront : $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$. Transportons la force MP parallèlement à elle-même au point O, ce qui introduira le couple MP, OQ; ce couple pourra être décomposé en trois autres, agissant dans les plans coordonnés, et dont les moments seront représentés, en grandeur et en signe, d'après les principes



de la Statique, par :

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right);\quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right);\quad m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Si l'on fait de même pour tous les points du système, on verra que tous les couples pourront se ramener à trois agissant dans les plans coordonnés, et ayant pour moments :

$$L=\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right);\quad M=\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right);$$
$$N=\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Les équations (11) nous donneront donc :

$$L=C,\quad M=C',\quad N=C''.$$

En composant ces trois couples, on aura le couple résultant des quantités de mouvement, dont l'axe sera représenté par OG, et le moment par G, et l'on aura :

$$G=\sqrt{L^2+M^2+N^2};\ \cos GOx=\frac{L}{G};\ \cos GOy=\frac{M}{G};\ \cos GOz=\frac{N}{G}.$$

On en conclut :

$$G=\sqrt{C^2+C'^2+C''^2};\ \cos GOx=\frac{C}{G};\ \cos GOy=\frac{C'}{G};\ \cos GOz=\frac{C''}{G}.$$

Ainsi, l'axe du couple résultant des quantités de mouvement conserve pendant tout le mouvement une direction constante, et le moment de ce couple reste invariable.

Si on prenait d'autres axes passant par le point O, on trouverait encore les équations (11); seulement les constantes C, C', C'' n'auraient plus la même valeur; mais, quel que soit le système d'axes, l'origine restant au même point O, la quantité

$$C^2+C'^2+C''^2=G^2$$

restera invariable.

Le moment G du couple résultant varie quand on prend une autre origine O.

5. Principe de la conservation des aires. — Prenons une origine déterminée, et considérons l'équation :

$$N = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C''.$$

Soient N la projection de M sur xOy, r et θ les coordonnées polaires de ce point, de manière que :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

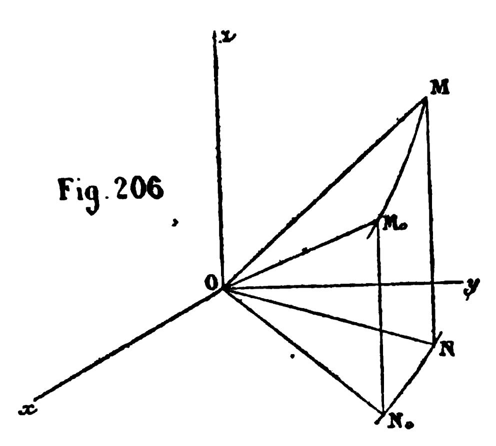


Fig. 206

On aura :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = 2 \frac{d\sigma''}{dt},$$

en représentant par σ'' l'aire du secteur N_0ON décrit par le rayon vecteur ON depuis $t = 0$ jusqu'à l'époque t. On aura donc :

$$\Sigma m \frac{d\sigma''}{dt} = \frac{C''}{2},$$

et, en intégrant :

$$\Sigma m \sigma'' = \frac{C''t}{2}.$$

On aura de même, pour les autres plans coordonnés :

$$\Sigma m \sigma' = \frac{C't}{2},$$

$$\Sigma m \sigma = \frac{Ct}{2}.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si les forces extérieures au système sont nulles, ou si elles se font constamment équilibre, sur le système solidifié, si l'on considère un point quelconque* O, *et les rayons vecteurs* OM, OM'... *menés de ce point aux divers points du système, la somme des aires décrites par les projections de ces rayons vecteurs, sur un plan quelconque, multipliées par les masses* m, m'.., *des divers points du système, sera proportionnelle au temps, pourvu que l'on considère comme positives les aires décrites d'un mouvement direct, et comme négatives celles qui sont décrites d'un mouvement rétrograde.* (Cela résulte de ce que l'on a :

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^t r^2 \frac{d\theta}{dt} dt,$$

et que les parties de l'intégrale correspondantes aux valeurs négatives de $\frac{d\theta}{dt}$ sont elles-mêmes négatives.)

Dans le cas où toutes les forces extérieures composées, comme si le système était solide, auraient une résultante passant par le point fixe, le théorème aurait encore lieu en prenant l'origine des rayons vecteurs à ce point fixe.

C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des aires.*

6. Plan du maximum des aires. — Les constantes C, C', C'' représentent les doubles des aires décrites dans l'unité de temps sur les plans coordonnés (ces aires étant multipliées par les masses); pour comparer ces aires, qui croissent proportionnellement au temps, il suffit donc de comparer C, C', C''. La quantité C'' qui repond à la somme des aires décrites sur le plan xOy a pour expression :

$$C'' = G \cos (GOz).$$

G est constant; si l'on prend un autre plan des xy, C''

variera proportionnellement à cos GOz; C' sera donc le plus grand possible, quand on aura

$$\cos(GOz) = 1$$

ou quand Oz se confondra avec OG; alors le plan xOy se confondra avec le plan du couple résultant des quantités de mouvement; donc, ce plan jouit de la propriété que la somme des aires décrites dans l'unité de temps par les projections, sur ce plan, des rayons vecteurs, est la plus grande possible. C'est le plan du *maximum des aires;* il conserve, comme on voit, une direction invariable pendant toute la durée du mouvement; c'est le plan que Laplace a nommé le *plan invariable.*

Lorsque le plan des xy est perpendiculaire sur celui du couple résultant, on a

$$GOz = 90^\circ; \quad \cos GOz = 0, \quad C' = 0.$$

Donc, la somme des aires décrites pendant un temps quelconque sur un plan perpendiculaire au *plan invariable* est nulle.

Enfin, si l'on suppose que le plan xOy se déplace de manière à faire un angle constant avec le plan du couple résultant, on aura $GOz =$ const. et $C' =$ const. Donc, *la somme des aires décrites, pendant le même temps, par les projections des rayons vecteurs* est la même pour tous les plans qui font un même angle avec le plan du couple résultant.

Remarque I. — Si l'on prend le plan invariable pour plan des xy, on a $C = 0$, $C' = 0$, par conséquent :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = G,$$

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

$$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0.$$

On a là des formules simples, qui peuvent être très utiles dans certaines recherches; Jacobi en a tiré un grand parti dans son beau Mémoire *sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps* (*Journal de Liouville*, t. IX).

Remarque II. — Si la somme des moments des forces extérieures n'est nulle que par rapport à l'axe Oz, on aura seulement :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = C,$$

$$\Sigma m\sigma = \frac{Ct}{2}.$$

De là ce théorème :

Théorème. — *Si la somme des moments des forces extérieures, par rapport à un axe fixe, est constamment égale à zéro, si l'on fait la somme des aires décrites, dans un temps donné t, par les projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe, des droites qui joignent un point de l'axe fixe aux différents point matériels, ces aires étant multipliées par les masses de ces points, on obtient une somme proportionnelle au temps t employé à les décrire.*

C'est la généralisation d'un théorème que nous avons démontré antérieurement dans le cas d'un seul point matériel.

7. Du principe des aires dans le mouvement relatif. — Il arrive fréquemment que l'on décompose le mouvement d'un système matériel en deux mouvements composants, dont l'un est le mouvement du système par rapport à des axes de direction constante, menés par son centre de gravité, et l'autre est le mouvement de ces axes eux-mêmes; ce dernier mouvement est un mouvement de translation identique à celui du centre de gravité du système; en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité O_1, on

aura, par le théorème du mouvement du centre de gravité :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m &= \sum X,\\ \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m &= \sum Y,\\ \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m &= \sum Z. \end{aligned}\right.$$

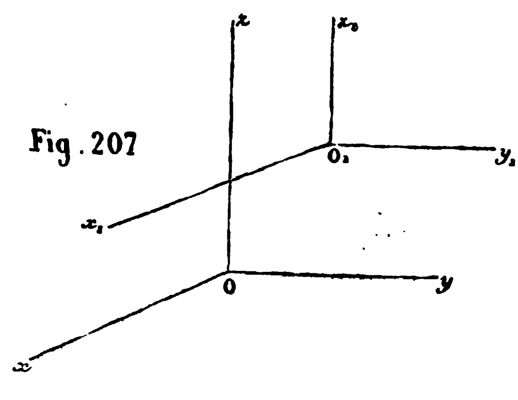


Fig. 207

Menons par le point O_1 des axes O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz; soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point quelconque, par rapport aux nouveaux axes; nous aurons :

$$(2)\qquad x = x_1 + \xi;\quad y = y_1 + \eta;\quad z = z_1 + \zeta.$$

Voyons ce que deviendront les équations des moments, quand nous remplacerons x, y, z, par leurs valeurs (2) :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum (xY - yX),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

nous aurons :

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = x_1\frac{d^2y}{dt^2} - y_1\frac{d^2x}{dt^2} + \xi\frac{d^2y}{dt^2} - \eta\frac{d^2x}{dt^2},$$

d'où l'on déduit, en remarquant qu'à un moment donné, x_1, y_1, z_1 sont les mêmes pour tous les points du corps :

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = x_1\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} - y_1\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} + \Sigma m\left(\xi\frac{d^2y}{dt^2} - \eta\frac{d^2x}{dt^2}\right);$$

d'ailleurs :

$$xY - yX = x_1 Y - y_1 X + \xi Y - \eta X,$$

$$\sum (xY - yX) = x_1 \sum Y - y_1 \sum X + \sum (\xi Y - \eta X).$$

Les équations (3) pourront s'écrire :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \left(\Sigma m \dfrac{d^2 y}{dt^2} - \sum Y \right) - y_1 \left(\Sigma m \dfrac{d^2 x}{dt^2} - \sum X \right) \\ \qquad + \Sigma m \left(\xi \dfrac{d^2 y}{dt^2} - \eta \dfrac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (\xi Y - \eta X). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Or on a :

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X; \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y; \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z,$$

il en résulte donc :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m \left(\xi \dfrac{d^2 y}{dt^2} - \eta \dfrac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (\xi Y - \eta X), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Remplaçons maintenant $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$ par leurs valeurs, déduites de (2), et nous trouverons :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} \Sigma m \xi - \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} \Sigma m \eta + \Sigma m \left(\xi \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = \sum (\xi Y - \eta X), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Nous n'avons encore rien supposé relativement à l'origine O_1 ; si nous admettons qu'elle coïncide avec le centre de gravité, nous aurons :

$$(7) \qquad \Sigma m \xi = 0; \quad \Sigma m \eta = 0; \quad \Sigma m \zeta = 0.$$

Donc les équations (6) vont nous donner :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m \left(\xi \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} \right) = \sum (\xi Y - \eta X), \\ \Sigma m \left(\eta \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = \sum (\eta Z - \zeta Y), \\ \Sigma m \left(\zeta \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) = \sum (\zeta X - \xi Z). \end{array} \right.$$

De manière que ces équations (8) des moments ont la même forme, quand on rapporte le mouvement à des axes mobiles, mais de direction fixe, passant par le centre de gravité, que quand on les rapporte à des axes absolument fixes. Ce sont ces équations (8) que l'on emploie, pour déterminer les mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité, tandis que les équations (1) font connaître les mouvements de ces centres de gravité.

On trouverait encore que les équations (8) ont lieu, si le point O_1 origine des axes mobiles parallèles aux axes fixes, au lieu d'être le centre de gravité, était simplement un point animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. En effet, jusqu'à l'équation (6), nous n'avons pas tenu compte précédemment de ce que le point G était le centre de gravité; les équations (6) ont donc lieu quel que soit le point O_1; or ici, dans notre nouvelle hypothèse :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0.$$

Les équations (6) coïncident donc bien avec (8).

Il en serait encore de même si l'on avait constamment :

$$(9) \qquad \frac{\frac{d^2 x_1}{dt^2}}{\Sigma m\xi} = \frac{\frac{d^2 y_1}{dt^2}}{\Sigma m\eta} = \frac{\frac{d^2 z_1}{dt^2}}{\Sigma m\zeta}.$$

Or, en désignant les coordonnées du centre de gravité, relativement aux axes mobiles, par ξ_1, η_1, ζ_1, on a :

$$\Sigma m\xi = \xi_1 \Sigma m; \quad \Sigma m\eta = \eta_1 \Sigma m; \quad \Sigma m\zeta = \zeta_1 \Sigma m.$$

Les équations (9) peuvent donc s'écrire :

$$\frac{\frac{d^2 x_1}{dt^2}}{\xi_1} = \frac{\frac{d^2 y_1}{dt^2}}{\eta_1} = \frac{\frac{d^2 z_1}{dt^2}}{\zeta_1},$$

et elles signifient que la force accélératrice qu'il faudrait

appliquer au point O_1 pour lui donner le mouvement qu'il a réellement, doit être constamment dirigée vers le centre de gravité du système.

Ces deux dernières manières d'obtenir la même forme (8) pour les équations des moments ne sont guère employées; tandis que la première l'est constamment.

Si les forces extérieures sont nulles, ou si elles se font équilibre sur le système solidifié, les sommes de leurs moments par rapport aux axes mobiles seront égales à zéro; on aura donc :

$$(10) \quad \sum(\xi Y - \eta X) = 0, \quad \sum(\eta Z - \zeta Y) = 0, \quad \sum(\zeta X - \xi Z) = 0.$$

et on déduira encore des équations (8) :

$$(11) \quad \begin{cases} \Sigma m\left(\xi \dfrac{d\eta}{dt} - \eta \dfrac{d\xi}{dt}\right) = C'', \\ \Sigma m\left(\eta \dfrac{d\zeta}{dt} - \zeta \dfrac{d\eta}{dt}\right) = C, \\ \Sigma m\left(\zeta \dfrac{d\xi}{dt} - \xi \dfrac{d\zeta}{dt}\right) = C', \end{cases}$$

en désignant par C, C′, C″ trois constantes arbitraires.

Et l'on aura, relativement aux axes mobiles menés par le centre de gravité, toutes les conséquences données précédemment relativement aux axes fixes : somme des aires décrites en projection, sur un plan quelconque, proportionnelle au temps; plan du couple résultant des quantités de mouvement invariable; invariabilité du moment de ce couple, et enfin ce plan invariable sera encore le plan du maximum des aires.

Il faut remarquer que si les forces extérieures avaient une résultante unique passant par un point fixe O, les équations (10) n'auraient pas lieu relativement aux axes mobiles menés par le centre de gravité, et par suite, non plus les

équations (11). On ne peut appliquer le théorème des aires que pour les rayons vecteurs issus du centre fixe.

Dans le cas où les forces extérieures au système consisteraient cependant en des attractions dirigées vers un centre fixe, et proportionnelles à la distance, on sait que la résultante de toutes ces attractions passerait toujours par le centre de gravité du système; donc, dans ce cas particulier, les équations (11) auraient encore lieu.

8. Application au système planétaire. — En négligeant les actions des étoiles, ce système n'est soumis qu'à des forces intérieures; on aura donc, en désignant par x, y, z les coordonnées d'une molécule quelconque m du système, rapportées à des axes de direction invariable, menés par le centre de gravité :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= C, \\ \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= C', \\ \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= C''. \end{aligned}\right.$$

Le plan du couple résultant des quantités de mouvement aura une direction invariable, et si l'on désigne par α, α', α'' les angles que fait l'axe de ce plan avec les axes des coordonnées, on aura :

$$(13)\quad \cos\alpha = \frac{C}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}; \quad \cos\alpha' = \frac{C'}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}};$$
$$\cos\alpha'' = \frac{C''}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}.$$

L'équation du plan invariable sera :

$$(14)\qquad Cx + C'y + C''z = 0.$$

Pour calculer C, C', C'' par les formules (12), Laplace

réduit les corps célestes, y compris le Soleil, à de simples points matériels, ce qui n'est pas rigoureux; car, le signe Σ s'étendant à toutes les molécules du système planétaire, il y a lieu, comme l'a montré Poinsot, de tenir compte des parties provenant des molécules du Soleil, et de leurs vitesses dues à leur mouvement de rotation autour de l'axe du Soleil; il faudrait faire la même chose pour toutes les planètes.

On peut montrer toutefois que les parties ainsi négligées dans les équations (12) sont très petites [1] par rapport à celles que l'on conserve.

Il reste encore à introduire dans les équations (12), au lieu des coordonnées rapportées au centre de gravité, les coordonnées rapportées au centre du Soleil, qui sont celles que nous pouvons déduire des observations.

Soient x, y, z, m les coordonnées et la masse du Soleil, x_i, y_i, z_i, m_i les mêmes éléments pour une planète quelconque; on a :

$$(15)\qquad C' = m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \Sigma m_i\left(x_i\frac{dy_i}{dt} - y_i\frac{dx_i}{dt}\right),$$

et l'origine étant au centre de gravité, on a :

$$(16)\qquad mx + \Sigma m_i x_i = 0;\quad my + \Sigma m_i y_i = 0;\quad mz + \Sigma m_i z_i = 0.$$

Soient ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées de la planète, relatives au Soleil; on aura :

$$(17)\qquad x_i = x + \xi_i;\quad y_i = y + \eta_i;\quad z_i = z + \zeta_i.$$

Les équations (16) donnent alors :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} x\Sigma m &= -\Sigma m_i\xi_i,\\ y\Sigma m &= -\Sigma m_i\eta_i,\\ z\Sigma m &= -\Sigma m_i\zeta_i.\end{aligned}\right.$$

(1) Poisson, *Mécanique*, t. II, p. 471.
Pontécoulant, *Système du monde*, t. III.

A cause de (17), (15) devient :

$$(19)\quad C' = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\Sigma m + \frac{dy}{dt}\Sigma m_i\xi_i - \frac{dx}{dt}\Sigma m_i\eta_i + \Sigma m_i\left(\xi_i\frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i\frac{d\xi_i}{dt}\right) + x\,\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt} - y\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt}.$$

On remplacera, dans cette équation, x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs déduites de (18), savoir :

$$x = -\frac{\Sigma m_i\xi_i}{\Sigma m};\quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\Sigma m}\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt},$$
$$y = -\frac{\Sigma m_i\eta_i}{\Sigma m};\quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\Sigma m}\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt},$$

et l'on trouvera après réductions :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} C' &= \Sigma m_i\left(\xi_i\frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i\frac{d\xi_i}{dt}\right) - \frac{1}{m+\Sigma m_i}\left(\Sigma m_i\xi_i\,\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt} - \Sigma m_i\eta_i\,\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt}\right),\\ C' &= \Sigma m_i\left(\zeta_i\frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i\frac{d\zeta_i}{dt}\right) - \frac{1}{m+\Sigma m_i}\left(\Sigma m_i\zeta_i\,\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt} - \Sigma m_i\xi_i\,\Sigma m_i\frac{d\zeta_i}{dt}\right),\\ C &= \Sigma m_i\left(\eta_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i\frac{d\eta_i}{dt}\right) - \frac{1}{m+\Sigma m_i}\left(\Sigma m_i\eta_i\,\Sigma m_i\frac{d\zeta_i}{dt} - \Sigma m_i\zeta_i\,\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Nous avons remplacé dans ces équations Σm par $m + \Sigma m_i$. On peut transformer ces équations comme il suit :

$$C'(m+\Sigma m_i) = m\,\Sigma m_i\left(\xi_i\frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i\frac{d\xi_i}{dt}\right) + \Sigma m_j\,\Sigma m_i\left(\xi_i\frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i\frac{d\xi_i}{dt}\right) - \Sigma m_i\xi_i\,\Sigma m\,\frac{d\eta_j}{dt} + \Sigma m_i\eta_i\,\Sigma m_j\frac{d\xi_i}{dt}.$$

Les termes en $m_i^2 \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right)$ se détruisent, et il reste :

$$
\begin{aligned}
C'' (m + \Sigma m_i) = m \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) \\
+ \Sigma\Sigma\, m_i m \left[\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} + \xi_j \frac{d\eta_j}{dt} - \eta_j \frac{d\xi_j}{dt}\right] \\
- \xi_i \frac{d\eta_j}{dt} - \xi_j \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_j}{dt} - \eta_j \frac{d\xi_i}{dt}.
\end{aligned}
$$

De manière qu'en désignant par c, c', c'' de nouvelles constantes reliées aux anciennes par les formules

$$
c = C\left(1 + \frac{\Sigma m_i}{m}\right); \quad c' = C'\left(1 + \frac{\Sigma m_i}{m}\right); \quad c'' = C''\left(1 + \frac{\Sigma m_i}{m}\right),
$$

on aura :

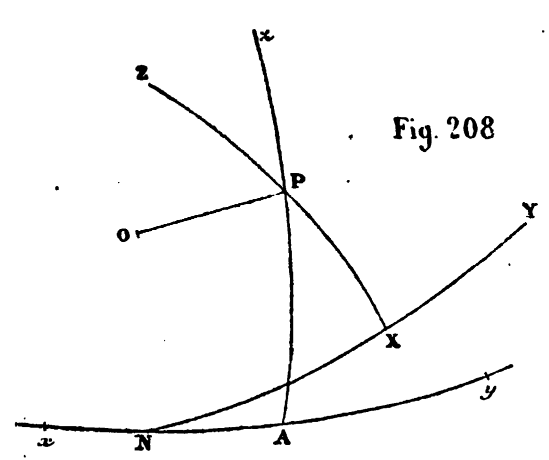
$$
(21) \left\{
\begin{aligned}
c &= \Sigma m_i \left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) + \frac{1}{m} \Sigma\Sigma m_i m_j \left[(\eta_i - \eta_j) \frac{d(\zeta_i - \zeta_j)}{dt} \right. \\
&\qquad \left. - (\zeta_i - \zeta_j) \frac{d(\eta_i - \eta_j)}{dt}\right], \\
c' &= \Sigma m_i \left(\zeta_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi_i \frac{d\zeta_i}{dt}\right) + \frac{1}{m} \Sigma\Sigma m_i m_j \left[(\zeta_i - \zeta_j) \frac{d(\xi_i - \xi_j)}{dt} \right. \\
&\qquad \left. - (\xi_i - \xi_j) \frac{d.(\zeta_i - \zeta_j)}{dt}\right], \\
c'' &= \Sigma m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) + \frac{1}{m} \Sigma\Sigma m_i m \left[(\xi_i - \xi_j) \frac{d(\eta_i - \eta_j)}{dt} \right. \\
&\qquad \left. - (\eta_i - \eta_j \frac{d(\xi_i - \xi_j)}{dt}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

On connaîtra à une époque donnée, pour les diverses planètes, les quantités ξ_i, η_i, ζ_i et leurs dérivées; si donc les masses des planètes sont connues, les formules (20) feront connaître les valeurs de C, C', C'' à l'époque donnée, et relatives à un certain système d'axes. Si on fait le calcul à une autre époque très éloignée de la première, on aura des valeurs de C, C', C'' qui devraient être égales aux précé-

dentes, si on pouvait les rapporter aux mêmes systèmes d'axes, ce qui ne peut se faire d'une manière absolument rigoureuse. Quoi qu'il en soit, les deux valeurs de $C^2 + C'^2 + C''^2$ devront être égales entre elles, quels que soient les changements intérieurs survenus dans le système solaire, dans l'intervalle de temps écoulé, pourvu qu'il ne soit survenu aucune action extérieure.

Pour être entièrement rigoureux, il faudrait faire intervenir les satellites et les comètes dans les équations (20), mais leurs masses étant très petites, peuvent être négligées. On voit que, pour faire le calcul indiqué ci-dessus, il faudrait connaître avec une grande précision les masses des planètes; on ne les connaît pas encore toutes avec toute l'exactitude que l'on pourrait désirer.

Remarque. — Dans les équations (20), les seconds termes des seconds membres sont très petits, relativement aux premiers, à cause du diviseur $m + \Sigma m_i$ qui est grand, à cause de la présence de la masse du Soleil m.



On peut concevoir, comme il suit, la possibilité d'obtenir dans notre système planétaire un système d'axes absolument fixes.

Le centre de gravité du système solaire décrit une droite d'un mouvement uniforme; par un point arbitraire O, menons une parallèle OP à cette droite, un plan NX parallèle au plan invariable, et conce-

vons une sphère de rayon 1 ayant pour centre le point O. Supposons que nous sachions déterminer à chaque époque la position du plan invariable et de la droite OP relativement à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Soit OX la projection de la droite OP sur le plan invariable; prenons $XY = XZ = 90°$. Notre système d'axes absolument fixes serait OX, OY, OZ. On peut, c'est notre hypothèse, déterminer la position des axes OX, OY, OZ, relativement aux axes Ox, Oy, Oz; on pourra donc aussi déterminer la position des axes Ox, Oy, Oz relativement aux axes absolument fixes.

Si xy est le plan de l'écliptique, on pourrait donc rapporter la position de ce plan si important à des axes absolument fixes, et, par suite, suivre ses variations dans le cours des siècles. Il faudrait toutefois que la droite OP ne fût pas perpendiculaire sur le plan invariable, car alors le point X ne serait pas déterminé.

Mais, si la position du plan invariable est difficile à déterminer avec précision, il est infiniment plus difficile de déterminer la position de la droite OP, de sorte que ce que nous venons de dire ne présente qu'un intérêt purement théorique.

9. Principe des forces vives. — Considérons l'un des points matériels du système dont la masse est m, et v la vitesse à l'époque t; on a, en tenant compte de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur ce point :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z;$$

on en déduit, en multipliant ces équations respectivement par dx, dy, dz :

$$d\cdot\frac{mv^2}{2} = \Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Faisons la somme de toutes les équations semblables relatives à tous les points du système, et nous aurons en intégrant :

$$(1) \qquad \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2\sum \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

v_0 est, d'une manière générale, la valeur initiale de v; $X dx + Y dy + Z dz$ est, comme on sait, le travail élémentaire de la force F, aux composantes X, Y, Z, appliqué au point x, y, z; $\int (X dx + Y dy + Z dz)$, ou bien $\int_0^t \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) dt$, est le travail de cette force pendant le temps t; l'équation (1) équivaut donc au théorème suivant :

THÉORÈME GÉNÉRAL DES FORCES VIVES. — *La variation de la somme des forces vives de tous les points d'un système en mouvement, pendant un temps quelconque, est égale au double de la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur tous les points du système, pendant le même temps.*

Travail des forces intérieures. — Considérons deux points matériels M (x, y, z), M' (x', y', z') de masses m et m', posons :

$$MM' = r;$$

l'action mutuelle de ces deux points se compose de deux forces $MA = M'A'$, dirigées suivant la droite MM', chacune de ces forces étant égale à $mm' \varphi(r)$. Les composantes de la force MA sont :

$$X = mm' \varphi(r) \frac{x' - x}{r}; \quad Y = mm' \varphi(r) \frac{y' - y}{r};$$
$$Z = mm' \varphi(r) \frac{(z' - z)}{r}.$$

Le travail élémentaire de cette force est égal à :

$$X dx + Y dy + Z dz$$
$$= - mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x - x') dx + (y - y') dy + (z - z') dz].$$

On aura de même, pour le travail élémentaire de la force M'A', dont les composantes X', Y', Z' sont égales et opposées à X, Y, Z :

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz'$$
$$= mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x - x') dx' + (y - y') dy' + (z - z') dz'].$$

En ajoutant, on aura pour le travail élémentaire de l'action mutuelle des deux points matériels :

$$- mm' \frac{\varphi(r)}{r} [(x - x') (dx - dx') + (y - y') dy - dy')$$
$$+ (z - z') (dz - dz')],$$

ce qui, en vertu des relations :

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$
$$rdr = (x - x') (dx - dx') + (y - y') (dy - dy')$$
$$+ (z - z') (dz - dz'),$$

se réduit à :

$$- mm' \varphi(r) dr,$$

ou à :

$$+ mm' d.\psi(r).$$

En posant :

$$- \varphi(r) = \psi'(r),$$

la somme des travaux élémentaires des forces intérieures sera donc :

$$\sum mm' d.\psi(r) = d. \sum mm' \psi(r),$$

et la somme des travaux des mêmes forces, pendant le

temps t, sera :

(2) $$\sum mm' \psi(r) - \sum mm' \psi(r_0)...,$$

en désignant par r_0 la valeur initiale de r.

L'équation (1) s'écrira donc :

(3) $$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\left[\sum mm' \psi(r) - \sum mm' \psi(r_0)\right] + 2\sum\int(Xdx + Ydy + Zdz).$$

où X, Y, Z ne doivent plus représenter que les composantes des forces extérieures.

On voit la différence entre ce théorème des forces vives et le principe du mouvement du centre de gravité ou celui des aires; il n'élimine pas les forces intérieures. Ces forces intérieures disparaîtront dans le cas où les distances mutuelles des divers points du système vérifieront l'équation :

$$\sum mm' \psi(r) - \sum mm' \psi(r_0) = 0,$$

pendant le temps considéré. Cela aura lieu, en particulier pour les corps solides, dans lesquels on considère les distances entre les molécules comme constantes, quand on néglige les déformations. Dans ce cas, on voit qu'on a ce théorème :

La variation, pendant un temps donné, de la somme des forces vives des divers points matériels du système est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui agissent sur les divers points du système, pendant le même temps.

Ce théorème trouve son application dans les machines, où les circonstances qui permettent son emploi sont à peu près réalisées.

Dans le cas où les forces extérieures sont nulles, l'équation (3) donne :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\left[\sum mm' \psi(r) - \sum mm' \psi(r_0)\right].$$

Ce que l'on peut écrire, en remarquant que $2\sum mm' \psi(r)$ est une fonction des coordonnées des divers points du système, et désignant par C une constante arbitraire :

$$(4)\quad \Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)=\mathrm{F}(x, y, z, x', y', z'\ldots)+\mathrm{C}.$$

C'est là une intégrale du problème. — Ce cas est réalisé dans le système planétaire. En réduisant chaque corps céleste à son centre de gravité, on a :

$$\varphi(r)=\frac{f}{r^2}=-\psi'(r); \quad \psi(r)=\frac{f}{r}.$$

La somme des travaux des forces, qui sont toutes intérieures, sera : $f.\frac{\Sigma m_i m_j}{r_i r_j}$, en faisant abstraction d'une constante, et l'on aura, en considérant les vitesses absolues des centres de gravité du Soleil et des diverses planètes :

$$\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)=2f\sum\frac{m_i m_j}{r_i r_j}+\text{Const.}$$

Revenons au cas général, où les forces extérieures ne sont pas nulles; supposons que l'expression

$$\sum\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$$

soit la différentielle d'une fonction de x, y, z, x', y', z', ..., c'est ce qui arrivera lorsque les forces extérieures seront constamment dirigées vers des centres fixes, leurs intensités étant fonction seulement de la distance, ou quand ce seront des forces perpendiculaires à un plan fixe, ou à une droite fixe, les intensités ne dépendant que des distances des points d'application à ce plan, ou à cette droite.

On aura alors :

$$\sum\sum\int(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)=\int d.\Phi(x, y, z, x', y', z', \ldots)$$
$$=\Phi(x, y, z, x', y', z', \ldots)-\Phi(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \ldots),$$

et au lieu de l'équation (3) :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\left[\sum mm'\psi(r) - \sum mm'\psi\right](r_0) + 2\,[\Phi(x, y, z, \ldots) - \Phi(x_0, y_0, z_0, \ldots)],$$

ou bien, en faisant :

$$\sum mm'\psi(r) + \Phi(x, y, z, \ldots) = \Psi(x, y, z, x', y', z', \ldots),$$

(5) $$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\,[\Psi(x, y, z, x', y', z, \ldots) - \Psi(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \ldots)],$$

ou bien :

(6) $$\Sigma mv^2 = 2\,\Psi(x, y, z, x', y', z', \ldots) + C.$$

Dans ce cas, qui se présente souvent, le théorème des forces vives donne donc une intégrale, l'intégrale des forces vives.

Quand la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, est constamment nulle, la force vive reste constante pendant toute la durée du mouvement; le système conserve sa force vive, et on a, dans ce cas particulier, le principe de la conservation des forces vives.

Il existe une relation très simple entre la force vive du mouvement d'un système par rapport à des axes fixes, et celle de son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité. Menons en effet par ce centre de gravité des axes parallèles aux axes fixes; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du système par rapport aux axes fixes, ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes qui sont mobiles, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du système par rapport aux axes fixes. On aura :

$$x = x_1 + \xi; \quad y = y_1 + \eta; \quad z = z_1 + \zeta,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{d\xi}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt} + \frac{d\zeta}{dt},$$

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{dt^2} + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right) + \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}.$$

On en conclut, en désignant par V la vitesse du centre de gravité, par u la vitesse du point M dans le mouvement relatif, autour du centre de gravité :

$$v^2 = V^2 + u^2 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

En multipliant par m, et faisant la somme des équations analogues qui correspondent à tous les points du système, on aura, en remarquant qu'à un moment donné, V, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ sont les mêmes pour tous les points du système :

$$\Sigma mv^2 = V^2\,\Sigma m + \Sigma mu^2 + 2\frac{dx_1}{dt}\Sigma m\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{dy_1}{dt}\Sigma m\frac{d\eta}{dt} + 2\frac{dz_1}{dt}\Sigma m\frac{d\zeta}{dt}.$$

Or, l'origine des coordonnées ξ, η, ζ, étant au centre de gravité du système, on a constamment :

$$\Sigma m\xi = 0; \quad \Sigma m\eta = 0; \quad \Sigma m\zeta = 0,$$

d'où :

$$\Sigma m\frac{d\xi}{dt} = 0; \quad \Sigma m\frac{d\eta}{dt} = 0; \quad \Sigma m\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Il en résulte donc :

$$\Sigma mv^2 = V^2\,\Sigma m + \Sigma mu^2. \tag{7}$$

Ainsi, on a le théorème suivant :

La force vive totale d'un système est égale à la force vive de la masse entière concentrée au centre de gravité, plus la force vive de ce système, dans son mouvement relatif autour du centre de gravité.

10. Application de l'intégrale des forces vives au système planétaire. — Nous réduirons le Soleil et les planètes à leurs centres de gravité, négligeant ainsi les forces vives provenant de la rotation de ces corps sur eux-mêmes (ou

plutôt, les variations de ces forces vives); nous aurons, en désignant d'une manière générale par v la vitesse absolue du point M dont la masse est m, par $\Delta_{i,j}$ la distance mutuelle des points M_i et M_j, dont les masses sont m_i et m :

$$\Sigma m v^2 = 2f \Sigma \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}} + \text{Const.} \tag{1}$$

Considérons maintenant le mouvement relatif du système autour de son centre de gravité; soient V la vitesse absolue du centre de gravié, u la vitesse relative du point M, M la masse totale du système; on aura :

$$\Sigma m v^2 = MV^2 + \Sigma m u^2,$$

et l'équation (1) deviendra :

$$MV^2 + \Sigma m u^2 = 2f \Sigma \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}} + \text{Const.} \tag{2}$$

Or, la vitesse V est constante; si donc, on pose

$$U = f \Sigma \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}}, \tag{3}$$

l'équation (2) donnera, en désignant par C une constante arbitraire :

$$\Sigma m u^2 = 2U + C. \tag{4}$$

Convenons maintenant que M désigne le Soleil, dont les coordonnées rapportées aux axes mobiles, de directions invariables passant par le centre de gravité, soient x, y, z; soient x_i, y_i, z_i les coordonnées correspondantes d'une planète quelconque. L'équation (4) deviendra, en mettant à part ce qui se rapporte au Soleil :

$$m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \Sigma m_i \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{dt^2} = 2U + C. \tag{5}$$

En opérant comme au n° (7), nous poserons :

$$x = x + \xi_i; \quad y_i = y + \eta_i; \quad z_i = z + \zeta_i. \tag{6}$$

On voit que ξ_i, η_i, ζ_i seront les coordonnées de la planète M_i, rapportées à des axes parallèles aux axes fixes, et ayant leur origine au centre du Soleil. On trouvera aisément que l'équation (5) devient, en ayant égard à (6) :

$$(7)\quad (m+\Sigma m_i)\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt}+2\frac{dy}{dt}\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt}$$
$$+2\frac{dz}{dt}\Sigma m_i\frac{d\zeta_i}{dt}+\Sigma m_i\frac{d\xi_i^2+d\eta_i^2+d\zeta_i^2}{dt^2}=2U+C.$$

Or on a :

$$(m+\Sigma m_i)\,x=-\Sigma m_i\xi_i,$$
$$(m+\Sigma m_i)\,y=-\Sigma m_i\eta_i,$$
$$(m+\Sigma m_i)\,z=-\Sigma m_i\zeta_i.$$

On portera ces valeurs de x, y, z, et les valeurs correspondantes de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans le premier membre de l'équation (7) qui deviendra :

$$\Sigma m_i\frac{d\xi_i^2+d\eta_i^2+d\zeta_i^2}{dt^2}$$
$$-\frac{1}{m+\Sigma m_i}\left\{\left(\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2+\left(\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2+\Sigma m_i\left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\};$$

en mettant à part dans l'expression (3) de U les distances des planètes au Soleil, on aura, en désignant par r_i la distance de la planète au Soleil :

$$U=fm\,\Sigma\frac{m_i}{r_i}+f\,\Sigma\frac{m_im_j}{\Delta_{i,j}},$$

où les signes Σ s'étendent seulement aux planètes, et à leurs combinaisons deux à deux, le Soleil étant mis à part; finalement, l'équation (7) deviendra :

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma m_i\frac{d\xi_i^2+d\eta_i^2+d\zeta_i^2}{dt^2}-\frac{1}{m+\Sigma m_i}\left\{\left(\Sigma m_i\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2+\left(\Sigma m_i\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\left(\Sigma m^i\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right\}=2fm\,\Sigma\frac{m_i}{r_i}+2f\,\Sigma\frac{m_im_j}{\Delta_{i,j}}+C.\end{aligned}\right.$$

Telle est la forme qui prend l'intégrale des forces vives dans le système planétaire, quand on rapporte les mouvements des planètes au centre du Soleil.

On peut transformer cette équation (A) en multipliant ses deux membres par $m + \Sigma m_i$; le premier membre devient, comme on s'en assure aisément :

$$m\,\Sigma m_i \frac{d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2}{dt^2} + (\Sigma m_i)\,\Sigma\, m_i \frac{d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2}{dt^2}$$
$$-\Sigma m_i^2 \frac{d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2}{dt^2} - 2\Sigma m_i m \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dy_j}{dt} + \frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}\right).$$

On trouve finalement, au lieu de la forme (A), la suivante :

$$\text{(B)} \left\{ \begin{aligned} & m\Sigma m_i \frac{d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2}{dt^2} \\ & \quad + \Sigma m_i m_j \frac{(dx_i - dx_j)^2 + (dy_i - dy_j)^2 + (dz_i - dz_j)^2}{dt^2} \\ & \qquad = 2f(m + \Sigma m_i)\left(m\Sigma \frac{m_i}{r_i} + \frac{\Sigma\, m_i m_j}{\Delta_{i,j}}\right) + C. \end{aligned} \right.$$

11. Digression sur l'application du principe des forces vives au système du monde. — Commençons par donner, sous une forme simple, les équations des mouvements des divers points qui remplacent le Soleil et les planètes; nous aurons, en conservant les notations précédentes, et traitant le Soleil comme l'une quelconque des planètes, afin de ne pas altérer la symétrie :

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{f m_i m_j}{\Delta^2_{i,j}} \frac{x_j - x_i}{\Delta_{i,j}} + \dots$$

et deux autres équations analogues, en remplaçant x par y, puis par z; voilà pour le mouvement du point M_i.

Or, on a :

$$\Delta^2_{i,j} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

d'où, en prenant les dérivées partielles par rapport à x_i :

$$\Delta_{i,j} \frac{d\,\Delta_{i,j}}{dx_i} = x_i - y_j,$$

ce qui permettra d'écrire l'équation (1) comme il suit :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{f m_i m_j}{\Delta^2_{i,j}} \frac{d\,\Delta_{i,j}}{dx_i} - \dots$$

ou bien :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f m_i m_j \frac{d \cdot \frac{1}{\Delta_{i,j}}}{dx_i} + \dots$$

ou encore :

$$(2) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f \frac{d}{dx_i} \cdot \left(\Sigma \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}}\right).$$

Dans le second membre de cette équation, sous le signe Σ, i doit rester constant, et j prendre les valeurs qui correspondent à tous les autres points, M_{i-1}, M_{i-2}, ...; M_{i+1}, M_{i+} , ...; on peut, si l'on veut, faire varier aussi l'indice i, car les termes ainsi introduits dans le signe Σ ne contiendront pas la coordonnée x_i de la planète considérée spécialement; si donc on pose

$$(3) \qquad U = f \Sigma \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}},$$

où i et j prennent chacun, et indépendamment l'un de l'autre, les valeurs 1, 2, ... n, n désignant le nombre des corps, sans que l'on ait jamais $i = j$, on déduira de (1) les équations suivantes, pour le mouvement de la planète M_i :

$$(4) \qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{dU}{dx_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{dU}{dy_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{dU}{dz_i}. \end{cases}$$

En donnant à i dans ces équations (4) les valeurs 1, 2, ..., n, U étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$, définie par l'équation (3), on obtiendra les $3n$ équations différentielles du mouvement des n corps considérés; U est la fonction des forces.

On déduit de (4) la combinaison suivante :

$$m_i\, d\left(\frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{dt^2}\right) = 2\left(\frac{dU}{dx_i}dx_i + \frac{dU}{dy_i}dy_i + \frac{dU}{dz_i}dz_i\right);$$

en donnant à i les valeurs 1, 2, ..., n, et faisant la somme des équations ainsi obtenues, on trouvera :

$$(5)\quad d\,\Sigma m_i \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{dt^2} = 2\Sigma\left(\frac{dU}{dx_i}dx_i + \frac{dU}{dy_i}dy_i + \frac{dU}{dz_i}dz_i\right).$$

Or, la fonction U ne contenant pas le temps explicitement, on a :

$$dU = \Sigma\left(\frac{dU}{dx_i}dx_i + \frac{dU}{dy_i}dy_i + \frac{dU}{dz_i}dz_i\right).$$

On déduira donc de (5) en intégrant, et désignant par h une constante arbitraire :

$$(6)\qquad \Sigma m_i \frac{dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2}{dt^2} = 2(U + h).$$

Or, on tire des équations (4), et des autres qui correspondent aux autres corps du système :

$$(7)\quad \Sigma m\left(x_i\frac{d^2x_i}{dt^2} + y_i\frac{d^2y_i}{dt^2} + z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \Sigma\left(x_i\frac{dU}{dx_i} + y_i\frac{dU}{dy_i} + z_i\frac{dU}{dz_i}\right).$$

Mais la fonction U est, en vertu de sa définition même (3), une fonction homogène de degré — 1 des quantités x_i, y_i, z_i; un théorème connu, relatif aux fonctions homogènes, donne :

$$\Sigma\left(x_i\frac{dU}{dx_i} + y_i\frac{dU}{dy_i} + z_i\frac{dU}{dz_i}\right) = -U,$$

et l'équation (7) devient :

$$\Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=-U.$$

En combinant cette équation avec (6), on trouve :

$$(8)\quad \Sigma m_i\left(\frac{dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2}{dt^2}+x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=U+2h.$$

Soit r_i la distance du point M_i à l'origine des coordonnées, on a :

$$r_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(r_i^2)}{dt}=x_i\frac{dx_i}{dt}+y_i\frac{dy_i}{dt}+z_i\frac{dz_i}{dt},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2}=\frac{dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2}{dt^2}+x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2},$$

et l'équation (8) peut s'écrire :

$$(9)\qquad d^2\Sigma\frac{m_ir_i^2}{dt^2}=2U+4h.$$

On peut transformer cette équation de manière à y introduire les distances mutuelles $\Delta_{i,j}$ au lieu des distances $r_{i,j}$; on a les identités :

$$(10)\quad \begin{cases}\Sigma m_i\,\Sigma m_ix_i^2-(\Sigma m_ix_i)^2=\Sigma m_im_j\,(x_i^2+x_j^2-2x_ix_j),\\ \Sigma m_i\,\Sigma m_iy_i^2-(\Sigma m_iy_i)^2=\Sigma m_im_j\,(y_i^2+y_j^2-2y_iy_j),\\ \Sigma m_i\,\Sigma m_iz_i^2-(\Sigma m_iz_i)^2=\Sigma m_im_j\,(z_i^2+z_j^2-2z_iz_j);\end{cases}$$

au reste :

$$\Delta^2_{i,j}=(x_i^2+x_j^2-2x_ix_j)+(y_i^2+y_j^2-2y_iy_j)+(z_i^2+z_j^2-2z_iz_j).$$

En ajoutant les trois équations (10), on aura donc en faisant $\Sigma m_i=M$:

$$(11)\quad M\Sigma m_ir_i^2-[(\Sigma m_ix_i)^2+(\Sigma m_iy_i)^2+(\Sigma m_iz_i)^2]=\Sigma m_im_j\,\Delta^2_{i,j}.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité du

système; on a :

$$\Sigma m_i x_i = \mathrm{M}\xi; \quad \Sigma m_i y_i = \mathrm{M}\eta; \quad \Sigma m_i z_i = \mathrm{M}\zeta.$$

On sait qu'en désignant par α, β, γ, α', β', γ' six constantes arbitraires, on a :

$$\xi = \alpha + \alpha' t; \quad \eta = \beta + \beta' t; \quad \zeta = \gamma + \gamma' t,$$

d'où :

$$(\Sigma m_i x_i)^2 + (\Sigma m_i y_i)^2 + (\Sigma m_i z_i)^2 = \mathrm{M}^2 [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')t + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)t^2].$$

En portant dans (11), et prenant deux fois la dérivée par rapport à t, on trouve :

$$\mathrm{M}\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2} = 2\mathrm{M}^2(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + \frac{d^2.\Sigma m_i m_j \Delta^2_{i,j}}{dt^2};$$

en tirant de là $\frac{d^2 \Sigma m_i r_i^2}{dt^2}$, pour le porter dans (9), et désignant par h' une nouvelle constante arbitraire, il viendra :

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d^2 \Sigma m_i m_j \Delta^2_{i,j}}{dt^2} = 2\mathrm{U} + 4h',$$

ou bien :

$$(12) \qquad \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d^2 \Sigma m_i m_j \Delta^2_{i,j}}{dt^2} = 2f\frac{\Sigma m_i m_j}{\Delta_{i,j}} + 4h',$$

équation remarquable dont Jacobi a tiré des conséquences intéressantes relativement à la stabilité du système planétaire; voir Jacobi : *Vorlesungen über Dynamik,* p. 27-30.

CHAPITRE II

APPLICATIONS DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

12. 1er PROBLÈME. — *Deux points matériels* M *et* M′, *de masses m et m′, réunis par une tige rigide, de longueur invariable, dont on néglige la masse, sont assujettis à se mouvoir dans un plan horizontal; on demande d'étudier leur mouvement.*

Le principe du mouvement du centre de gravité montre que le centre de gravité est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Prenons pour axe des x la position de la tige pour $t = 0$, pour origine la position G_0 du centre de gravité à cette époque.

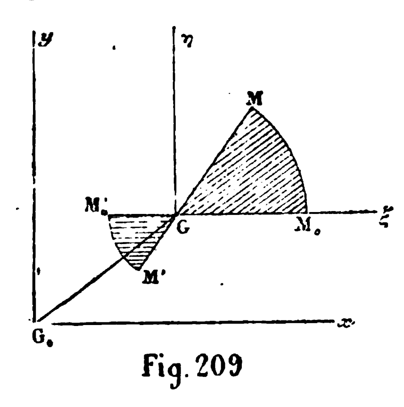


Fig. 209

Puisqu'il n'y a pas de forces extérieures au système, le centre de gravité décrira une droite G_0G, d'un mouvement uniforme :

Soit G sa position à l'époque t; soient G_0x et G_0y deux axes rectangulaires situés dans le plan du mouvement, $G\xi$ et $G\eta$ deux axes parallèles aux précédents, M et M′ les positions des deux points à l'époque t, φ l'angle $MG\xi$.

Le principe des aires aura lieu dans le mouvement relatif, autour du centre de gravité; soient sur $G\xi$, M_0 et M'_0 les positions initiales des deux points; le rayon vecteur du point M aura décrit le secteur circulaire M_0GM, d'aire σ; de même celui du point M′ aura décrit le secteur M'_0GM', d'aire σ'; en posant

$$r = \mathrm{GM}; \quad r' = \mathrm{GM}',$$

on aura :

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \varphi; \quad \sigma' = \frac{1}{2} r'^2 \varphi'.$$

Soit C une constante arbitraire; l'application du principe des aires donnera :

$$m\sigma + m'\sigma' = \mathrm{C}t,$$

ou bien,

$$\frac{1}{2}(mr^2 + m'r'^2)\varphi = \mathrm{C}t,$$

r et r' sont constants; soit donc β une nouvelle constante arbitraire; on aura :

$$\varphi = \beta t.$$

Ainsi, le centre de gravité G des deux points M et M′ se meut sur la droite G_0G d'un mouvement uniforme, et cette droite MM′ tourne d'un mouvement uniforme autour du point G; par là, le mouvement de la droite MM′ est entièrement déterminé; on aura ensuite les positions des points M et M′ eux-mêmes, en tenant compte des formules

$$\mathrm{GM} = r = \frac{m'}{m + m'} l,$$

$$\mathrm{GM}' = r' = \frac{m}{m + m'} l,$$

dans lesquelles l désigne la longueur de la tige, enveloppe de la droite MM′.

Soient *(fig. 210)* G et G_1 les positions du point G aux époques t et $t + \Delta t$, GM et G_1M_1 les positions correspondantes de la tige; l'angle MGA varie proportionnellement au temps; on aura donc, en désignant par α, ω et ω_1 trois constantes :

$$G_0G = \alpha t,$$
$$MGA = \omega t + \omega_1.$$

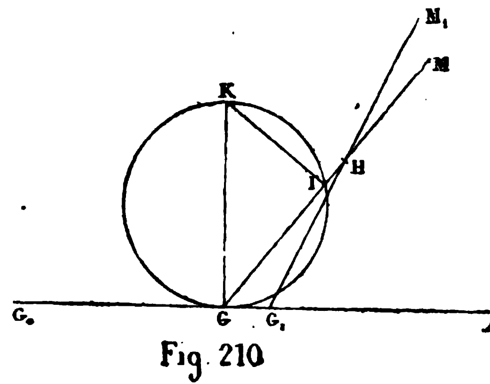


Fig. 210

Soit H le point d'intersection de GM et G_1M_1, on aura :

$$GG_1 = \alpha\,(t + \Delta t),$$
$$M_1G_1A = \omega(t + \Delta t) + \omega_1,$$

d'où :

$$(1) \quad \begin{cases} GG_1 = \alpha\,\Delta t, \\ H = \omega \Delta t. \end{cases}$$

Le triangle GG_1H donne :

$$HG_1 = GG_1 \frac{\sin(\omega t + \omega_1)}{\sin H}.$$

Soit I la limite du point H lorsque Δt tend vers zéro, l'équation précédente donne :

$$IG = \text{lim. } HG_1 = \sin(\omega t + \omega_1)\ \text{lim. } \frac{GG_1}{H},$$

ou, en tenant compte de (1) :

$$IG = \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t + \omega_1),$$

ou bien, en posant $\frac{\alpha}{\omega} = a$:

$$(2) \qquad IG = a \sin MGA.$$

Élevons au point I la perpendiculaire à GH, et au point G

la perpendiculaire à GA; soit K le point de rencontre de ces droites; l'enveloppe demandée sera le lieu du point I, et IK sera la normale à cette courbe. Le triangle rectangle KIG donne :

$$\mathrm{KG} = \frac{\mathrm{IG}}{\sin \mathrm{MGA}},$$

ou, en tenant compte de (2) :

$$\mathrm{KG} = a.$$

On en conclut que le cercle décrit sur KG comme diamètre a un diamètre constant a, et l'enveloppe cherchée est la cycloïde décrite par un point de ce cercle roulant sans glisser sur la droite G_0G.

13. 2e PROBLÈME. — *On donne deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy; *deux points matériels* M *et* M' *de masses* m *et* m', *réunis par un fil* MM' *de longueur invariable* l;

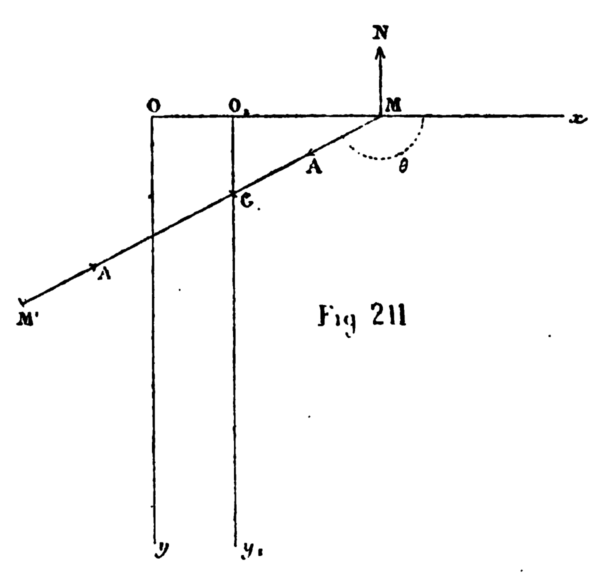


Fig 211

le point M *est assujetti à se mouvoir sur* Ox; *étudier le mouvement.* — Le point M est soumis à la tension MA = T

et à la réaction normale N de la droite Ox; le point M' à la tension $M'A' = T$. Les équations du mouvement seront, en posant $OM = x$, et désignant par x' et y' les coordonnées du point M' :

$$(1) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{T(x'-x)}{l}, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = -\dfrac{T(x'-x)}{l}, \qquad N = \dfrac{Ty'}{l}, \\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2} = -\dfrac{Ty'}{l}, \end{cases}$$

$$l^2 = (x'-x)^2 + y'^2;$$

puisque l'y du point M reste constamment nul, on a :

$$0 = T\frac{y'}{l} - N, \quad \text{d'où} \quad N = T\frac{y'}{l}.$$

Mais ces équations ne nous sont pas nécessaires pour déterminer le mouvement.

Appliquons en effet le principe du mouvement du centre de gravité, seulement pour Ox; nous éliminerons les tensions; N n'intervient pas; donc on a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

d'où, en intégrant :

$$(2) \qquad m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = C'.$$

Le principe des forces vives nous donne, en remarquant que la force N étant normale au déplacement du point M donne un travail égal à zéro, et qu'il en est de même de la somme des travaux des tensions T appliquées en M et M', parce que la distance MM' est invariable :

$$mv^2 + m'v'^2 = C,$$

ou bien :

$$(3) \qquad m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} = C.$$

Ces équations (2) et (3) pourraient d'ailleurs être tirées des équations (1). Pour déduire de ces équations les lois du mouvement, remarquons que l'on a :

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = x + l\cos\theta, \\ y' = \quad l\sin\theta, \end{cases}$$

(2) et (3) vont devenir :

$$\begin{cases} m\dfrac{dx}{dt} + m'\left(\dfrac{dx}{dt} - l\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\right) = C', \\ m\dfrac{dx^2}{dt^2} + m'\left[\dfrac{dx^2}{dt^2} + l^2\dfrac{d\theta^2}{dt^2} - 2l\dfrac{dx}{dt}\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}\right] = C. \end{cases}$$

On en tire :

$$(5) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{C' + m'l\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}}{m+m'},$$

$$\frac{1}{m+m'}\left(C' + m'l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m'l^2\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{2m'l\sin\theta}{m+m'}\frac{d\theta}{dt}\left(C' + m'l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) = C,$$

$$C'^2 + (m'^2l^2\cos^2\theta + mm'l^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = (m+m')C,$$

$$l\frac{d\theta}{dt}\sqrt{m'^2\cos^2\theta + mm'} = \sqrt{(m+m')C - C'^2}.$$

Soit ω la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$, répondant à $\theta = \theta_0$, on aura :

$$(6) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega\sqrt{m + m'\cos^2\theta_0}}{\sqrt{m + m'\cos^2\theta}}; \quad \omega t\sqrt{m + m'\cos^2\theta_0} = \int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{m + m'\cos^2\theta}\,d\theta;$$

l'expression de t en fonction de θ dépend des intégrales elliptiques.

θ pourra prendre toutes les valeurs possibles, car le radical $\sqrt{m + m' \cos^2 \theta}$ est toujours réel.

Pour trouver x en fonction de t, remarquons qu'on déduit de (2) et de (4), en appelant C_1 une nouvelle constante arbitraire :

$$mx + m'x' = C't + C_1,$$
$$(m + m')\, x = C't + C_1 - m'l \cos \theta,$$

d'où l'on déduirait x en fonction de t en remplaçant θ par sa valeur en t, conclue de l'équation (6).

Courbe décrite par le point M'. — De (2) et (5) on tire :

$$(m + m') \frac{dx'}{dt} = - ml \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + C',$$

d'où, en remplaçant dt par sa valeur tirée de (6) :

$$(m + m')\, dx' - ml\, d.\cos \theta = \frac{C' \sqrt{m + m' \cos^2 \theta}\, d\theta}{\omega \sqrt{m + m' \cos^2 \theta_0}},$$

$$\left\{\begin{aligned} &(m + m')(x' - x'_0) - ml \cos \theta \\ &\qquad = \frac{C'}{\omega \sqrt{m + m' \cos^2 \theta_0}} \int \sqrt{m + m' \cos^2 \theta}\, d\theta, \\ &y' = l \sin \theta. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations font connaître x' et y' en fonction de la variable auxiliaire θ et par suite donnent la trajectoire cherchée.

Cas particulier : $C' = 0$. — On a alors :

$$(m + m')(x' - x'_0) = ml \cos \theta,$$
$$my' = ml \sin \theta,$$

d'où :

$$(m + m')(x' - x'_0)^2 + m^2 y'^2 = m^2 l^2,$$

ce qui est l'équation d'une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

On aurait pu voir *à priori* que le point M' doit décrire une ellipse; soit en effet G le centre de gravité du système des deux points M et M'; désignons son abscisse par x_1, on aura :

$$(m + m') x_1 = mx + m'x',$$

$$(m + m') \frac{dx_1}{dt} = m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = C' = 0.$$

Donc :

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad x_1 = \text{Const.}$$

Ainsi le centre de gravité G ne doit pas sortir de O_1y_1 parallèle à Oy; donc la droite MM' a deux de ses points G et M assujettis à se mouvoir sur deux droites rectangulaires O_1x et O_1y_1; donc un quelconque de ses points, M' par exemple, décrit une ellipse.

14. Même problème en supposant le point M' pesant. — On aura encore :

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = C'.$$

Le principe des forces vives nous donnera :

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + m' \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} = C + 2m'gy'.$$

On a d'ailleurs :

$$x' = x + l \cos\theta,$$
$$y' = \quad l \sin\theta.$$

On tirera de là :

$$\left\{ \begin{aligned} &(m + m') \frac{dx}{dt} - m' l \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = C', \\ &(m + m') \frac{dx^2}{dt^2} - 2m' l \frac{dx}{dt} \sin\theta \frac{d\theta}{dt} + m' l^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = C + 2m'gl \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

On en déduit :

$$m' l^2 (m + m' \cos^2 \theta) \frac{d\theta^2}{dt^2} = (m + m') C - C'^2 + 2m' (m + m') gl \sin \theta;$$

pour $t = 0$, on aura :

$$m' l^2 (m + m' \cos^2 \theta_0) \omega^2 = (m + m') C - C'^2 + 2m' (m + m') gl (\sin \theta - \sin \theta_0),$$

$$dt = \pm \frac{\sqrt{m + m' \cos^2 \theta}\, d\theta}{\sqrt{(m + m' \cos^2 \theta_0) \omega^2 + 2 (m + m') \frac{g}{l} (\sin \theta - \sin \theta_0)}}.$$

En posant :

$$(m + m' \cos^2 \theta_0) \omega^2 - 2 (m + m') \frac{g}{l} \sin \theta_0 = 2 (m + m') \frac{g}{l} H,$$

ou bien :

$$H = - \sin \theta_0 + \frac{m + m' \cos^2 \theta_0}{2 (m + m')} \frac{\omega^2 l}{g},$$

il viendra :

$$dt = \pm \frac{\sqrt{m + m' \cos^2 \theta}\, d\theta}{\sqrt{2 (m + m') \frac{g}{l}} \sqrt{H + \sin \theta}}.$$

$$t \sqrt{2 (m + m') \frac{g}{l}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{m + m' \cos^2 \theta}}{\sqrt{H + \sin \theta}} d\theta.$$

On ne peut pas intégrer sous forme finie.

Si $H > 1$, θ pourra prendre toutes les valeurs possibles, car le radical $\sqrt{H + \sin \theta}$ sera toujours réel.

Si $H < 1$, on fera $H = \sin \beta$, et θ ne pourra prendre que les valeurs pour lesquelles on a :

$$\sin \beta + \sin \theta > 0.$$

Le mouvement sera oscillatoire.

Resterait à examiner le cas de $H = 1$; le pendule ne pourra atteindre la verticale qu'au bout d'un temps infini.

Ici encore pour $C' = 0$, la courbe décrite par le point M' est une ellipse. On a comme un pendule elliptique.

15. 3e PROBLÈME. — *On donne, dans un même plan vertical, deux courbes C et C'; deux points matériels pesants M et M', de masses m et m', sont astreints à se mouvoir sur ces deux courbes; ils sont réunis par une tige rigide et inflexible, dont on néglige la masse. Trouver leur mouvement.* — Prenons, dans le plan vertical donné, deux axes, Ox horizontal, Oy vertical et dirigé vers le haut. Les équations des deux courbes seront :

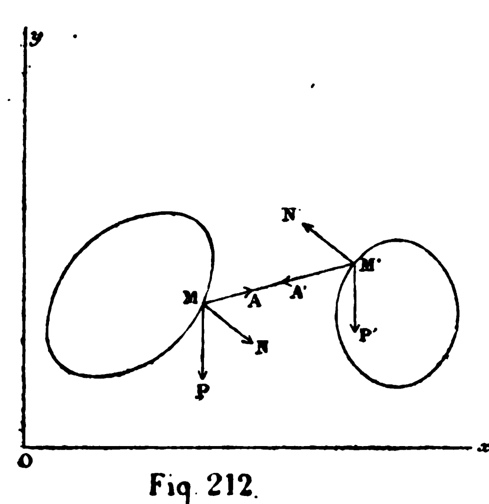


Fig 212.

(1) $f(x, y) = 0$; (2) $\varphi(x, y) = 0$,

avec la relation

(3) $$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 = l^2.$$

Les forces qui agissent sur M sont la force $MP = mg$, a réaction normale N et la tension $T = MA$.

Sur M' la force $M'P' = m'g$, la réaction N' normale à C' et la tension $T = M'A'$.

Le principe des forces vives est applicable; il élimine les réactions et les tensions, parce que la distance MM' est invariable; on a donc :

$$mv^2 + m'v'^2 = C - 2g(my + m'y'),$$

ou bien :

$$(4) \quad m\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2+dy'^2}{dt^2}=C-2g(my+m'y').$$

Des équations (1), (2) et (3) on peut tirer les valeurs de y, y', x' en fonction de x; l'équation (4) donnera ensuite une équation de la forme

$$\frac{dx^2}{dt^2}F(x)=C-\Phi(x),$$

d'où

$$(5) \qquad dt=\pm dx\sqrt{\frac{F(x)}{C-\Phi(x)}}.$$

Le problème sera ramené aux quadratures, on aura :

$$t=\pm\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{F(x)}{C-\Phi(x)}}.$$

On trouvera ensuite aisément N, N' et T. Posons :

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\pm N}{\sqrt{\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2}}=N_1, \\ \dfrac{\pm N'}{\sqrt{\left(\dfrac{d\varphi}{dx'}\right)^2+\left(\dfrac{d\varphi}{dy'}\right)^2}}=N'_1, \end{cases}$$

et nous aurons :

$$(7) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=N_1\dfrac{df}{dx}+T\dfrac{(x'-x)}{l}, \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}=N'_1\dfrac{d\varphi}{dx'}-T\dfrac{(x'-x)}{l}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=N_1\dfrac{df}{dy}-mg+T\dfrac{(y'-y)}{l}, \\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}=N'_1\dfrac{d\varphi}{dy'}-m'g-T\dfrac{(y'-y)}{l}, \end{cases}$$

d'où :

$$(8)\quad \begin{cases} N_1 \dfrac{df}{dx} + N_1' \dfrac{d\varphi}{dx'} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} + m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}, \\ N_1 \dfrac{df}{dy} + N_1' \dfrac{d\varphi}{dy'} = mg + m'g + m\dfrac{d^2y}{dt^2} + m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}. \end{cases}$$

En remplaçant dans ces équations x, y, x', y' par leurs valeurs en fonction de t, déduites de (1), (2), (3), (5), on en conclura N_1 et N_1', et par suite N et N′, par les équations (6); l'une des équations (7) donnera ensuite T.

16. Application. — La courbe C se réduit à l'axe Ox et C′ à l'axe Oy; les coordonnées du point M sont :

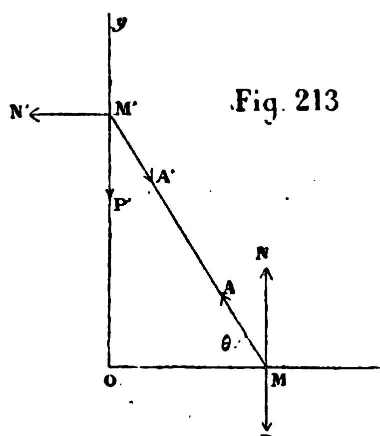


Fig. 213

$$x = l\cos\theta;\qquad y = 0,$$

celles de M′ :

$$x' = 0;\qquad y' = l\sin\theta.$$

Les vitesses v et v' des points M et M' sont respectivement :

$$v = -\,l\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$v' = +\,l\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Le principe des forces vives donnera ici :

$$mv^2 + m'v'^2 = C - 2m'gy' = C - 2m'gl\sin\theta,$$

$$l^2\frac{d\theta^2}{dt^2}(m\sin^2\theta + m'\cos^2\theta) = C - 2m'gl\sin\theta;$$

d'où on tire :

$$dt = \pm\, l\,d\theta\sqrt{\frac{m\sin^2\theta + m'\cos^2\theta}{C - 2m'gl\sin\theta}};$$

$$t = l\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\frac{m\sin^2\theta + m'\cos^2\theta}{C - 2m'gl\sin\theta}}\,d\theta.$$

Supposons $\theta_0 = 0$ et lançons le point M′ suivant Oy avec la vitesse a. Nous aurons :

$$v'_0 = a = + l \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0,$$

$$a^2 m' = C,$$

et par conséquent :

$$dt = l d\theta \sqrt{\frac{m \sin^2 \theta + m' \cos^2 \theta}{m' (a^2 - 2gl \sin \theta)}},$$

ou, en posant :

$$a^2 = 2gh,$$

$$dt = l d\theta \sqrt{\frac{m \sin^2 \theta + m' \cos^2 \theta}{2g\, m' (h - l \sin \theta)}},$$

$$t\sqrt{\frac{2g}{l}} = \int_0^\theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \frac{m}{m'} \sin^2 \theta}{\frac{h}{l} - \sin \theta}}\, d\theta.$$

Si l'on a $h > l$, le radical sera réel pour toutes les valeurs de θ ; θ ira en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et la barre arrivera à coïncider avec Oy. Pour $h < l$, on pourra faire $\frac{h}{l} = \sin \beta$; θ ira en croissant de 0 à β, puis décroîtra de β à 0.

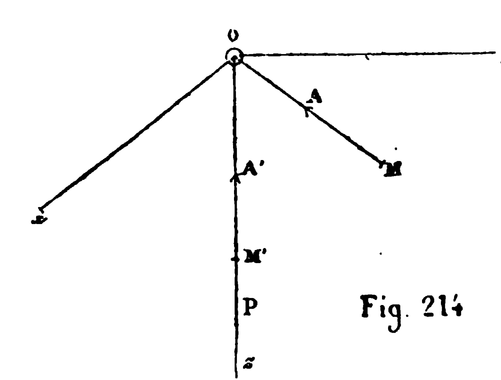


Fig. 214

17. 4e Problème. — *M et M′ sont deux points matériels pesants, de masses m et m', assujettis le premier à rester sur le plan horizontal xOy, le second, sur la verticale Oz ; ces deux*

points sont réunis par un fil inextensible de longueur l, *qui passe sur une petite poulie placée en* O. *Étudier le mouvement de ces deux points.*

Désignons par

$$x, y, r, \theta$$

les coordonnées rectangulaires et polaires de M. Posons :

$$z' = \mathrm{OM}'.$$

En désignant encore par T la tension du fil, le point M sera soumis à la tension T, à la réaction normale du plan xOy et à son poids, et pourra être considéré comme libre; il en sera de même du point M' qui sera soumis aux forces $\mathrm{M'A'} = \mathrm{T}$ et $\mathrm{M'P} = m'g$; on aura donc, pour déterminer le mouvement des points M et M', les équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mathrm{T}\dfrac{x}{r}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\mathrm{T}\dfrac{y}{r}, \\ m'\dfrac{d^2z'}{dt^2} = m'g - \mathrm{T}, \\ z' + r = l, \\ r^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

On déduit de ces équations l'intégrale des forces vives :

$$m\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + m'\frac{dz'^2}{dt^2} = \text{const.} + 2m'gz',$$

ou bien :

$$(2) \qquad m\frac{dr^2 + r^2\,d\theta^2}{dt^2} + m'\frac{dr^2}{dt^2} = \mathrm{C}' - 2m'gr.$$

Le point M étant soumis à l'action d'une force centrale, on a l'intégrale des aires :

$$(3) \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C}.$$

(2) et (3) donnent la solution du problème. On en déduit sans peine :

$$(4)\qquad d\theta = \pm C\sqrt{m+m'}\,\frac{dr}{r\sqrt{f(r)}},$$

$$(5)\qquad dt = \pm \sqrt{m+m'}\,\frac{rdr}{\sqrt{f(r)}},$$

en faisant :

$$(6)\qquad f(r) = r^2(C' - 2m'gr) - mC^2.$$

On est conduit à des intégrales elliptiques.

Détermination des constantes C et C′. — Soient r_0 le rayon vecteur initial, v_0 la vitesse initiale, η_0 l'angle que fait cette vitesse avec le prolongement de r_0 ; on a :

$$v_0 \cos \eta_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0,$$

$$v_0 \sin \eta_0 = \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)_0.$$

Les formules (2) et (3) donneront :

$$(7)\qquad \begin{cases} C = r_0 v_0 \sin \eta_0, \\ C' = 2m'gr_0 + v_0^2(m + m'\cos^2\eta_0). \end{cases}$$

On pourra écrire :

$$(8)\quad f(r) = r^2\left\{v_0^2(m + m'\cos^2\eta_0) + 2m'g(r_0 - r)\right\} - mr_0^2v_0^2\sin^2\eta_0.$$

Discussion. — On a :

$$f(-\infty) > 0;\quad f(0) < 0;\quad f(r_0) > 0;\quad f(+\infty) < 0.$$

Donc, l'équation $f(r) = 0$, qui est du 3e degré, a ses trois racines réelles, deux α et β positives, une $-\gamma$ négative. On aura :

$$d\theta = \pm C\sqrt{\frac{m+m'}{2m'g}}\,\frac{rdr}{\sqrt{(r-\beta)(\alpha-r)(r+\gamma)}},$$

$$dt = \sqrt{\frac{m+m'}{2m'g}} \frac{rdr}{\sqrt{(r-\beta)(\alpha-r)(r+\gamma)}},$$

$$t\sqrt{\frac{2m'g}{m+m'}} = \int_{r_0}^{r} \frac{rdr}{\sqrt{(r-\beta)(\alpha-r)(r+\gamma)}}.$$

La courbe décrite par le point M est comprise tout entière entre les cercles $r = \beta$ et $r = \alpha$, qu'elle touche aux points où elle les rencontre.

Pour que le mobile M′ ne passe pas par-dessus la poulie, on devra avoir $l - \alpha > 0$; alors, z' restera compris entre $l - \alpha$ et $l + \beta$.

Condition pour que le mobile M décrive un cercle. — On devra avoir :

$$\alpha = \beta = r_0,$$
$$f(r_0) = 0, \quad f'(r_0) = 0.$$

Or :

$$f(r_0) = r_0^2 v_0^2 (m + m') \cos^2 \eta_0,$$
$$\frac{1}{2r_0} f'(r_0) = v_0^2 (m + m' \cos^2 \eta_0) - m'gr_0,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\pi}{2}, \\ v_0 &= \sqrt{\frac{m'}{m} gr_0}; \end{aligned} \right.$$

telles sont les conditions cherchées.

Calcul de T. — On déduit de (1) :

$$-2\int T dr = mv^2 = m\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = C^2 m \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2}$$
$$= \frac{C^2 m}{r^2} + \frac{m}{m+m'}(C' - 2m'gr) - \frac{m^2 C^2}{r^2(m+m')},$$

$$-2\int T dr = \frac{C^2 mm'}{r^2(m+m')} + \frac{mC'}{m+m'} - \frac{2mm'gr}{m+m'};$$

d'où en différentiant :

$$-2T = \frac{-2C^2 mm'}{r^3(m+m')} - \frac{2mm'g}{m+m'},$$

$$T = \frac{mm'}{m+m'}\left[g + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \eta_0}{r^3}\right].$$

18. 5ᵉ PROBLÈME. — *Mouvement d'une chaîne pesante et homogène, suspendue sur le bord d'un plan horizontal.* — Soit ρ la masse de l'unité de longueur de la chaîne, l sa longueur. Posons :

$$OA = x, \quad OB = l - x.$$

Fig 215

A un moment donné, tous les points de la chaîne ont la même vitesse $\frac{dx}{dt}$; donc :

$$\Sigma mv^2 = \frac{dx^2}{dt^2}\Sigma m = \rho l \frac{dx^2}{dt^2}.$$

En désignant par X la force qui agit sur un élément de la chaîne, on aura par le principe de l'équivalence de la force vive et du travail l'équation :

$$\frac{1}{2} d.\Sigma mv^2 = \sum X dx.$$

Or on a ici :

$$X = g dm,$$

$$\sum X dx = dx\, \Sigma g dm = g dx\, \Sigma dm,$$

Σdm s'étend à la partie OA; donc :

$$\Sigma dm = \rho x,$$

et l'on a :

$$\frac{1}{2} d.\rho l \frac{dx^2}{dt^2} = g\rho x\, dx,$$

$$\rho l\, dx \frac{d^2x}{dt^2} = g\rho x\, dx,$$

(1) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l} x,$$

d'où, en intégrant, et désignant par A et B deux constantes arbitraires :

$$x = Ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}.$$

Supposons que, pour $t = 0$, $x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$, c'est à dire que la chaine soit abandonnée sans vitesse initiale; on déterminera aisément A et B, et on trouvera :

(2) $$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right).$$

REMARQUE. — Pour la partie OB, les réactions du plan et les poids ne donnent pas de travail.

Tension de la chaîne. — Proposons-nous de calculer la tension T en un point N de la partie AO; posons $AN = \alpha$. Si l'on coupe la chaine en N, on pourra remplacer la partie supérieure par la tension T; on peut alors appliquer le principe des forces vives à la portion AN, ce qui donne l'équation :

$$\frac{1}{2} d.\left(\rho\alpha \frac{dx^2}{dt^2}\right) = g\rho\alpha\, dx - T dx,$$

d'où

$$\rho\alpha \frac{d^2x}{dt^2} = g\rho\alpha - T.$$

En remplaçant $\frac{d^2x}{dt^2}$ par sa valeur (1), il vient :

(3) $$T = g\rho\alpha\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Pour calculer la tension en un point M de la partie OB, posons :

$$MB = l - \beta.$$

Si l'on coupe la chaine en M, on pourra remplacer l'action

de la partie inférieure par la tension T′, et appliquer le principe des forces vives à la partie MB; on aura :

$$T' dx = \frac{1}{2} d. \left\{ \rho (l - \beta) \frac{dx^2}{dt^2} \right\},$$

$$T' = \rho (l - \beta) \frac{d^2x}{dt^2} = \rho (l - \beta) \frac{g}{l} x,$$

(4) $$T' = g\rho x \left(1 - \frac{\beta}{l}\right).$$

Les formules (2) et (3) s'accordent à donner :

$$T' = g\rho x \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

pour la tension en 0; cette tension est maxima pour $x = \frac{l}{2}$; elle a alors pour valeur $g\rho \frac{l}{4}$.

19. 6e Problème. — *Deux points matériels* M *et* M′, *de masses* m *et* m′ *sont attirés, proportionnellement à la distance, par un point fixe* O; *ils sont réunis par une tige rigide et inflexible, de longueur* l, *dont on néglige la masse. Le point* M *est assujetti à se mouvoir sur une droite fixe* Ox. — *Étudier le mouvement supposé avoir lieu dans un plan.*

Désignons par n^2 la constante d'attraction; soient T la tension de la tige, N la réaction normale de la droite Ox; le point M sera soumis à l'action des forces $MA = mn^2 . OM$, $MB = T$ et N; le point M′ sera soumis à l'action des forces $M'A' = m'n^2 . OM'$ et $M'B' = T'$; soient $OM = x$, et x' et y' les coordonnées de M′, les équations du mouvement des deux points seront :

(1) $$\left\{ \begin{aligned} & m \frac{d^2x}{dt^2} = - mn^2x + T \frac{(x' - x)}{l}, \\ & m' \frac{d^2x'}{dt^2} = - m'n^2x' - T \frac{(x' - x)}{l}, \\ & m' \frac{d^2y'}{dt^2} = - T \frac{y'}{l}, \\ & (x' - x)^2 + y'^2 = l^2. \end{aligned} \right.$$

On tire de là :

$$d^2 \frac{(mx + m'x')}{dt^2} = - n^2 (mx + m'x'),$$

ou, en faisant :

(2) $mx + m'x' = (m + m')\, X,$

(3) $$\frac{d^2X}{dt^2} = - n^2X.$$

Fig. 216

X est, comme on voit, l'abscisse du centre de gravité de M et M'. Le théorème des forces vives donne ensuite, en remarquant que le travail de N est nul, et qu'il en est de même de la somme des travaux des tensions appliquées en M et M', parce que la longueur MM' est invariable :

(4) $$m \frac{dx^2}{dt^2} + m' \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} = C - n^2 [mx^2 + m' (x'^2 + y'^2)],$$

où C désigne une constante arbitraire; nous ferons :

(5) $$x' = x + u.$$

De (2) et (5) on tire :

(6) $$\left\{ \begin{aligned} x &= X - \frac{m'}{m + m'} u, \\ x' &= X + \frac{m}{m + m'} u. \end{aligned} \right.$$

L'équation (4) donnera :

$$m \left\{ \frac{dX}{dt} - \frac{m'}{m + m'} \frac{du}{dt} \right\}^2 + m' \left\{ \frac{dX}{dt} + \frac{m}{m + m'} \frac{du}{dt} \right\}^2 + m' \frac{dy'^2}{dt^2}$$
$$- C + n^2 m \left\{ X - \frac{m'}{m + m'} u \right\}^2 + n^2 m' \left\{ X + \frac{m}{m + m'} u \right\}^2$$
$$+ n^2 m' y'^2 = 0.$$

En réduisant, on trouve :

$$(7)\quad (m+m')\left(\frac{dX^2}{dt^2}+n^2X^2\right)+\frac{mm'}{m+m'}\left\{\frac{du^2}{dt^2}+n^2u^2\right\}$$
$$+m'\left\{\frac{dy'^2}{dt^2}+n^2y'^2\right\}=C.$$

L'équation (3) donne en intégrant, et désignant par A et B deux constantes arbitraires :

$$(8)\qquad X = A\cos nt + B\sin nt,$$

on a aussi :

$$(9)\qquad u = l\cos\theta,\quad y' = l\sin\theta;$$

en tenant compte de (8) et de (9), (7) devient :

$$n^2(m+m')(A^2+B^2)+\frac{mm'}{m+m'}l^2\left\{\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}+n^2\cos^2\theta\right\}$$
$$+m'l^2\left\{\cos^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}+n^2\sin^2\theta\right\}=C,$$

d'où :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}\left\{m\sin^2\theta+(m+m')\cos^2\theta\right\}+n^2\left\{m\cos^2\theta+(m+m')\sin^2\theta\right\}$$
$$=C_1n^2m+n^2m,$$

$$\frac{d\theta^2}{n^2dt^2}=\frac{C_1m-m'\sin^2\theta}{m+m'\cos^2\theta},$$

et par conséquent :

$$(10)\quad ndt=\pm d\theta\sqrt{\frac{m'\cos^2\theta+m}{m'\cos^2\theta+H}};\quad nt=\int d\theta\sqrt{\frac{m'\cos^2\theta+m}{m'\cos^2\theta+H}},$$

H désignant une nouvelle constante arbitraire.

On aura ensuite :

$$(11)\qquad x = A\cos.nt + B\sin.nt - \frac{m'}{m+m'}l\cos\theta,$$

$$(12) \qquad x' = \mathrm{A} \cos nt + \mathrm{B} \sin . nt + \frac{m'}{m + m'} \, l \sin \theta,$$

$$(13) \qquad y' = l \sin \theta.$$

Les formules (10), (11), (12), (13) résolvent complètement le problème, qui dépend, dans le cas général, d'intégrales elliptiques; lorsque H = 0, on peut effectuer la quadrature (10) sous forme finie.

CHAPITRE III

THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE.

20. Considérons un corps solide. Soient, relativement à trois axes rectangulaires fixes, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de ce corps, dm un élément de masse dont M est le centre; on est conduit en Dynamique à la considération des intégrales suivantes, qui s'étendent à toute la masse du corps :

$$(1) \qquad \int x\, dm, \quad \int y\, dm, \quad \int z\, dm,$$

$$(2) \qquad \int yz\, dm, \quad \int zx\, dm, \quad \int xy\, dm,$$

$$(3) \qquad \int x^2\, dm, \quad \int y^2\, dm, \quad \int z^2\, dm.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, M la masse totale du corps; on a :

$$\int x\, dm = Mx_1; \quad \int y\, dm = My_1; \quad \int z\, dm = Mz_1.$$

De sorte que, si l'origine est au centre de gravité du corps, les trois intégrales (1) seront nulles.

Nous montrerons que, l'origine O ayant une position déterminée par rapport au corps, on peut toujours déterminer la direction des trois axes Ox, Oy, Oz, de manière que les trois intégrales (2) soient nulles. Quant aux trois

intégrales (3), si l'on pose :

$$(4)\quad A=\int(y^2+z^2)\,dm;\quad B=\int(z^2+x^2)\,dm;\quad C=\int(x^2+y^2)\,dm,$$

on aura :

$$(5)\quad \begin{cases} 2\int x^2\,dm = B + C - A, \\ 2\int y^2\,dm = C + A - B, \\ 2\int z^2\,dm = A + B - C. \end{cases}$$

On sera donc ramené au calcul des quantités A, B, C.

On appelle, en général, *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite quelconque la somme $\int p^2 dm$, p désignant la distance de l'élément dm à la droite considérée, et la somme s'étendant à toute la masse du corps. Ainsi, A est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Ox, B et C par rapport à Oy et Oz.

21. Détermination des moments d'inertie. — Cette détermination revient à un problème de calcul intégral.

1° Un des exemples les plus simples est celui du moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle homogène, par rapport à l'une de ses arêtes.

Prenons pour axes Ox, Oy, Oz, trois arêtes contiguës, dont les longueurs soient a, b, c; on aura :

$$A=\int(y^2+z^2)\,dm=\rho\int_0^a\int_0^b\int_0^c(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\rho a\int_0^b\int_0^c(y^2+z^2)\,dy\,dz,$$

$$\int(y^2+z^2)\,dz=y^2z+\frac{z^3}{3},$$

$$\int_0^c(y^2+z^2)\,dz=c\left(y^2+\frac{c^2}{3}\right).$$

$$A = \rho ac \int_0^b \left(y^2 + \frac{c^2}{3}\right) dy,$$

$$\int \left(y^2 + \frac{c^2}{3}\right) dy = \frac{y^3}{3} + \frac{c^2 y}{3},$$

$$\int_0^b \left(y^2 + \frac{c^2}{3}\right) dy = b\,\frac{(b^2 + c^2)}{3},$$

donc :

$$A = \rho\, abc \cdot \frac{b^2 + c^2}{3},$$

ou en désignant par M la masse du parallélipipède :

$$A = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{3}; \quad B = M \cdot \frac{c^2 + a^2}{3}; \quad C = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

2° **Moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à un de ses diamètres.** — Rapportons la sphère à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz passant par son centre. Nous aurons :

$$A = \int (y^2 + z^2)\, dm; \quad B = \int (z^2 + x^2)\, dm; \quad C = \int (x^2 + y^2)\, dm,$$

d'où :

$$A + B + C = 2\int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm.$$

La symétrie montre que $A = B = C$; donc :

$$A = \frac{2}{3}\int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = \frac{2}{3}\int r^2\, dm,$$

en posant :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Prenons pour élément de volume une couche sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$; nous aurons :

$$dm = 4\pi\rho r^2\, dr,$$

ρ désignant la densité de la sphère :

$$A = \frac{8\pi\rho}{3}\int_0^R r^4\, dr = \frac{8\pi\rho R^5}{15} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \cdot \frac{2R^2}{5},$$

où R représente le rayon de la sphère. Donc

$$A = B = C = \frac{2MR^2}{5}.$$

3° **Moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène, par rapport à ses trois axes de figure.**

$$(1)\qquad A = \int (y^2 + z^2)\, dm = \rho \iiint (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

les intégrations s'étendent à tous les points intérieurs à la surface, qui a ici pour équation :

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

x, y, z désignant les coordonnées d'un point quelconque N, faisons-lui correspondre un point N′ (x', y', z'), par les formules :

$$(3)\qquad x = ax'; \quad y = by'; \quad z = cz';$$

à l'élément de volume $dv = dx\, dy\, dz$, répondra l'élément de volume $dv' = dx'\, dy'\, dz'$; les formules (3) donneront :

$$dv = abc\, dv';$$

à l'ellipsoïde (2) répondra la sphère :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

et nous aurons :

$$dm = \rho dv = \rho abc dv';$$

la formule (1) donnera :

$$(4)\qquad \frac{1}{\rho abc} A = b^2 \int y'^2\, dv' + c^2 \int z'^2\, dv'.$$

Les intégrations s'étendent maintenant à tous les points intérieurs à la sphère :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

de rayon 1.

On aura :

$$\int x'^2\,dv' = \int y'^2\,dv' = \int z'^2 dv' = \frac{1}{3}\int (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dv' = \frac{1}{3}\int r'^2\,dv',$$

$$dv' = 4\pi r'^2\,dr',$$

$$\int r'^2\,dv' = 4\pi \int_0^1 r'^4\,dr' = \frac{4}{5}\pi;$$

donc :

$$\int y'^2\,dv' = \int z'^2\,dv' = \frac{4}{15}\pi.$$

La formule (4) donnera ensuite :

$$A = abc\,(b^2 + c^2)\,\frac{4}{15}\pi\rho = \frac{4}{3}\pi abc\rho\,\frac{b^2 + c^2}{5},$$

ou bien, en désignant par M la masse de l'ellipsoïde :

$$A = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{5},$$

$$B = M \cdot \frac{c^2 + a^2}{5},$$

$$C = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

22. Corps homogène terminé par une surface de révolution. — Le moment d'inertie d'un corps homogène se réduit à une seule quadrature, quand ce corps est terminé par une surface de révolution, et qu'on prend le moment par rapport à l'axe de figure.

Considérons un corps terminé par la surface engendrée par la révolution de la ligne CD autour de Ox. Posons :

$$OP = x, \quad OP' = x + dx,$$
$$AP = r, \quad BP = r + dr.$$

Le volume engendré par le rectangle $ABA'B'$ tournant autour de Ox est :

$$\pi dx \left\{ (r + dr)^2 - r^2 \right\} = 2\pi\,dx.r\,dr,$$

son moment d'inertie relativement à Ox est :

$$2\pi\rho\, dx . r\, dr \times r^2 = 2\pi\rho\, dx\, r^3 dr.$$

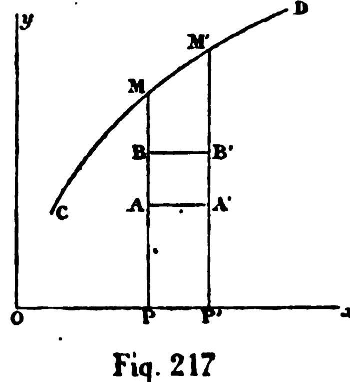


Fig. 217

Il faut intégrer de P en M, c'est-à-dire de $r = 0$ à $r = y$, y désignant l'ordonnée PM ; on aura ainsi :

$$\frac{\pi\rho}{2}\, dx\, y^4.$$

On aura donc :

$$A = \frac{\pi\rho}{2}\int_\alpha^\beta y^4\, dx; \qquad y = f(x),$$

où y doit être remplacé par l'ordonnée $f(x)$ de la courbe méridienne et où α et β désignent les limites entre lesquelles x est compris.

23. Comparaison des moments d'inertie d'un même corps par rapport à deux axes parallèles. — 1° L'un passe par le centre de gravité du corps.

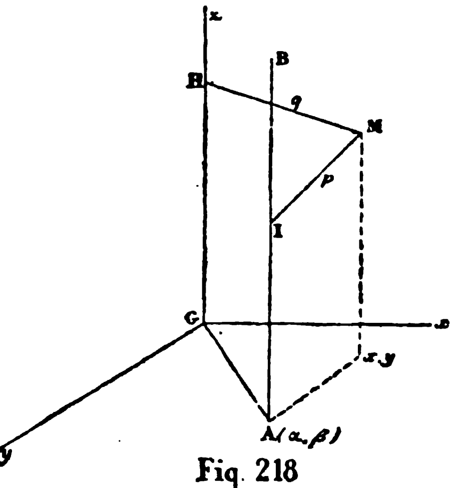


Fig. 218

On connaît le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe Gz passant par son centre de gravité G. On demande le moment d'inertie du même corps par rapport à un axe AB parallèle au premier.

Soient α, β, O les coordonnées du point A où la droite AB perce le plan xGy ;

Soient M un point quelconque du corps, x et y ses coordonnées, MI $= p$ sa distance à l'axe AB; MH $= q$ sa distance à Oz; on aura :

$$p^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$
$$p^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$
$$q^2 = x^2 + y^2,$$
$$\Sigma\, mp^2 = \Sigma\, mq^2 - 2\alpha\, \Sigma\, mx - 2\beta\, \Sigma\, my + (\alpha^2 + \beta^2)\, \Sigma m,$$

ou, en posant GA $= a$ et remarquant que

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0,$$

parce que l'origine coïncide avec le centre de gravité :

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$\Sigma m =$ M (masse du corps).

$$\Sigma mp^2 = \Sigma mq^2 + \mathrm{M}a^2.$$

De là ce théorème : *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.*

On en conclut que si l'on prend les moments d'inertie d'un corps par rapport à une série d'axes parallèles, on obtient le moment minimum lorsque l'axe passe par le centre de gravité.

2° *Les axes sont quelconques à des distances a et a' du centre de gravité.* — On a, d'après le théorème précédent :

$$\Sigma mp^2 = \Sigma mq^2 + \mathrm{M}a^2,$$
$$\Sigma mp'^2 = \Sigma mq^2 + \mathrm{M}a'^2,$$
$$\Sigma mp'^2 = \Sigma mp^2 + \mathrm{M}\,(a'^2 - a^2).$$

Telle est la relation qui existe entre les moments d'inertie,

Σmp^2 et $\Sigma mp'^2$ relatifs à deux axes parallèles distants de a et a' du centre de gravité.

Nous sommes ainsi ramenés à comparer les moments relatifs à deux axes qui passent par un même point, et pour cela nous allons d'abord chercher l'expression du moment d'inertie d'un corps, par rapport à un axe passant par l'origine.

24. Soient M un point quelconque du corps, x, y, z ses coordonnées, MI sa distance à l'axe OP qui fait avec les axes coordonnées les angles α, β, γ. Nous aurons :

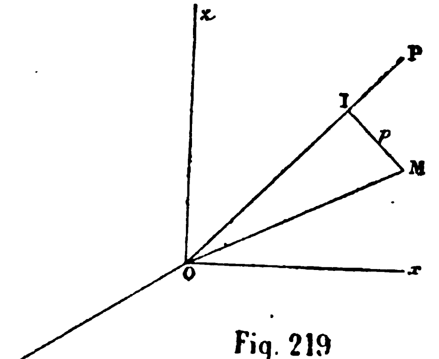


Fig. 219

$$\overline{MI}^2 = p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \overline{OI}^2,$$

$$OI = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

$$p^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

$$p^2 = \cos^2\alpha\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\,(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma\,yz - 2\cos\gamma\cos\alpha\,xz - 2\cos\alpha\cos\beta\,xy,$$

d'où :

$$\Sigma mp^2 = \cos^2\alpha\,\Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,\Sigma m(z^2 + x^2) + \cos^2\gamma\,\Sigma m(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma myz - 2\cos\gamma\cos\alpha\,\Sigma mxz - 2\cos\beta\cos\alpha\,\Sigma mxy.$$

Posons :

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad D = \Sigma myz,$$
$$B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad E = \Sigma mxz,$$
$$C = \Sigma m(x^2 + y^2), \quad F = \Sigma mxy,$$

et nous aurons :

$$(1)\ \Sigma mp^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Donc, pour trouver le moment d'inertie relativement à une droite quelconque passant par l'origine, il suffira de connaître les six constantes A, B, C, D, E, F. Remarquons que A, B, C sont les moments d'inertie du corps relativement aux axes Ox, Oy, Oz.

25. Représentation géométrique de la variation du moment d'inertie, quand la droite tourne autour du point O. — Sur OP portons une longueur :

$$OP = \frac{1}{\sqrt{\Sigma mp^2}},$$

et soient ξ, η, ζ les coordonnées du point P ; on aura :

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\Sigma mp^2}}; \quad \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\Sigma mp^2}}; \quad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{\Sigma mp^2}}.$$

En tirant de là les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et les portant dans (1), il vient :

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = 1.$$

Le lieu des points P est donc une surface du second degré ayant le point O pour centre. Tous les rayons vecteurs de la surface sont finis ; cette surface est donc un ellipsoïde. Poinsot l'a nommé *ellipsoïde central des moments*.

Si l'on avait pris pour axes de coordonnées les axes principaux de cet ellipsoïde, son équation eût été :

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

et on aurait eu :

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Ainsi, relativement à ces axes :

$$\Sigma myz = 0; \quad \Sigma mxz = 0; \quad \Sigma mxy = 0.$$

Réciproquement, si ces quantités sont nulles, les axes Ox, Oy, Oz sont les axes de l'ellipsoïde. Si l'on a seulement :

$$\Sigma myz = 0; \quad \Sigma mxz = 0,$$

il en résulte $D = 0$, $E = 0$; dans ce cas, Oz est un axe principal de l'ellipsoïde.

Définition. — Les *axes principaux d'inertie* sont les axes de l'ellipsoïde central. Les quantités A, B, C, moments d'inertie relativement aux axes de cet ellipsoïde, sont dites les *moments principaux d'inertie* relativement au point O.

En général, l'ellipsoïde admet un système d'axes principaux et un seul; donc, en général en un point donné O, il existe un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et un seul, tel que, relativement à ces trois axes, on ait :

$$\Sigma myz = 0; \quad \Sigma mxz = 0; \quad \Sigma mxy = 0.$$

Si l'ellipsoïde central est de révolution autour de Oz, il y a une infinité de systèmes d'axes principaux d'inertie; tous ces systèmes ont un axe commun Oz; deux droites rectangulaires quelconques OA et OB dans le plan xOy, complètent l'un quelconque des systèmes.

Si l'ellipsoïde devient une sphère, un système d'axes rectangulaires quelconque OA, OB, OC est un système d'axes principaux.

Soit r la longueur interceptée sur une droite quelconque OA, entre le centre de l'ellipsoïde et sa surface; soit μ le moment d'inertie du corps par rapport à la droite OA; on a, comme on l'a vu plus haut :

$$r = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{1}{r^2},$$

la variation du moment d'inertie est donc très nettement indiquée par la variation de r, lorsque la droite OA tourne autour du point O.

Si l'ellipsoïde est à trois axes inégaux, au plus petit axe répond le plus grand moment; au plus grand axe répond le plus petit moment.

Quand l'ellipsoïde est de révolution autour de Oz, et aplati dans le sens de Oz, le moment C correspondant à Oz est un maximum; tous les moments relatifs aux droites OA, OA′ ... situées dans le plan xOy sont égaux entre eux, et leur valeur commune est le minimum des moments d'inertie relatifs au point O.

Remarque I. — Les coefficients A, B, C ne peuvent pas être pris au hasard; en effet, des formules :

$$A = \Sigma m\,(y^2 + z^2); \quad B = \Sigma m\,(z^2 + x^2); \quad C = \Sigma m\,(x^2 + y^2),$$

on tire :

$$A + B - C = 2\Sigma m z^2.$$

Donc on doit avoir :

$$A + B - C > 0; \quad B + C - A > 0; \quad C + A - B > 0.$$

Remarque II. — Un ellipsoïde quelconque ne peut pas être considéré comme l'ellipsoïde central d'un corps.

Soit l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

supposons :

$$a^2 > b^2 > c^2;$$

l'équation de l'ellipsoïde central est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

On devra avoir :

$$\frac{1}{a^2} = A; \quad \frac{1}{b^2} = B; \quad \frac{1}{c^2} = C.$$

Il en résultera :

$$A < B < C,$$

mais on devra avoir aussi :

$$C < A + B,$$

ou bien :

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ainsi, a désignant le grand axe, b l'axe moyen, le petit axe doit vérifier l'inégalité ci-dessus.

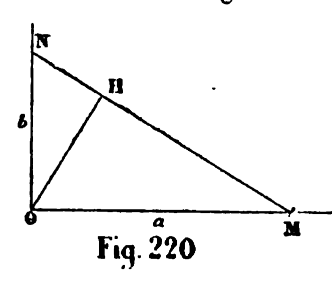


Fig. 220

Soient OM et ON deux droites rectangulaires, $OM = a$, $ON = b$; OH perpendiculaire sur MN; on devra avoir $c > OH$.

Supposons que l'ellipsoïde soit de révolution autour de son petit axe, on aura :

$$a = b > c;$$

l'inégalité ci-dessus donnera :

$$\frac{1}{c^2} < \frac{2}{a^2}; \quad c > \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad a - c < a - \frac{a}{\sqrt{2}},$$

ou :

$$\frac{a - c}{a} < 0,293.$$

Ainsi, pour qu'un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe puisse être considéré comme l'ellipsoïde central d'un corps, il faut que son aplatissement soit inférieur à 0,293.

26. Questions diverses relatives aux moments d'inertie. — 1° *Soient* Gx, Gy, Gz *les axes principaux relatifs au*

centre de gravité G, *on demande de trouver les axes principaux relatifs à un point quelconque* O *de* Gz.

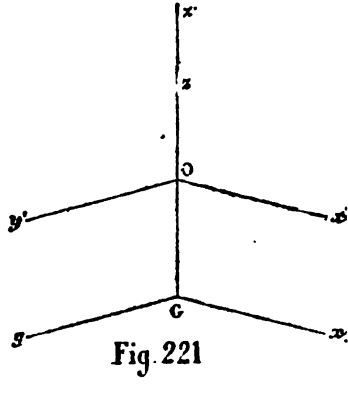


Fig. 221

Il est facile de vérifier que les axes principaux en O sont parallèles aux axes principaux en G.

En effet, puisque Gx, Gy, Gz sont les axes principaux d'inertie relatifs au point G, on a :

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma myz = 0; \quad \Sigma mzx = 0; \\ \Sigma mxy = 0, \end{cases}$$

et en outre, puisque le point G est le centre de gravité :

$$(2) \qquad \Sigma mx = 0; \quad \Sigma my = 0; \quad \Sigma mz = 0.$$

Posons OG $= l$; menons Ox' et Oy' respectivement parallèles à Gx et Gy; désignons par x', y', z' les coordonnées correspondantes à x, y, z et relatives aux nouveaux axes; nous aurons :

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = z - l,$$

d'où :

$$\Sigma my'z' = \Sigma my(z - l) = \Sigma myz - l\Sigma my,$$
$$\Sigma mz'x' = \Sigma mx(z - l) = \Sigma mzx - l\Sigma mx,$$
$$\Sigma mx'y' = \Sigma mxy.$$

En tenant compte de (1) et (2), ces relations deviennent :

$$\Sigma my'z' = 0; \quad \Sigma mz'x' = 0; \quad \Sigma mx'y' = 0,$$

ce qui prouve que Oz' ou Oz, et Ox', Oy' sont les axes principaux d'inertie du corps relativement au point O.

2° *Soient* Ox, Oy, Oz *les axes principaux relatifs à un point quelconque* O *du corps; prenons un second point* O'

sur Oz; $O'z$ *est-il un axe principal relativement au point* O'?

Menons $O'x'$, $O'y'$ parallèles à Ox, Oy. On a :

$$(3) \qquad \Sigma myz = 0; \quad \Sigma mxz = 0.$$

On doit avoir :

$$\Sigma my'z' = 0; \quad \Sigma mx'z' = 0,$$

ou :

$$\Sigma my(z - l) = 0; \quad \Sigma mx(z - l) = 0,$$

ou bien :

$$\Sigma myz - l\Sigma my = 0; \quad \Sigma mzx - l\Sigma mx = 0;$$

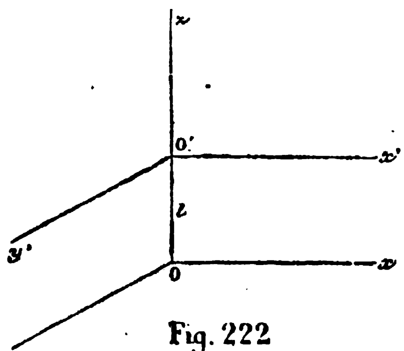


Fig. 222

d'où, en tenant compte de (3) :

$$\Sigma my = 0; \quad \Sigma mx = 0.$$

Donc, Oz doit passer par le centre de gravité ; dans ce cas, cette droite est un axe principal pour tous ses points.

Donc, si par un point de l'espace on mène une droite quelconque, il pourra se faire que cette droite ne soit un axe principal relativement à aucun de ses points, ou qu'elle le soit pour un de ses points, ou enfin qu'elle le soit pour deux de ses points, et alors elle passera nécessairement par le centre de gravité, et sera un axe principal d'inertie pour tous ses points.

Il n'existe donc en général que trois droites qui soient des axes principaux relativement à deux points de leur direction ; ces trois droites sont les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité.

3° *Un corps étant donné, peut-on trouver un point de ce corps relativement auquel les trois moments d'inertie principaux soient égaux?*

Soient O le point cherché, G le centre de gravité du corps; l'ellipsoïde principal pour le point O doit être une sphère; une droite quelconque passant par le point O, OG par exemple, sera un axe principal d'inertie, relativement au point O et, par suite, relativement au point G; soient Gx et Gy les deux autres axes principaux d'inertie relativement à ce point G. Les axes principaux d'inertie par le point O seront Oz, Ox' parallèle à Gx et Oy' parallèle à Gy.

Soient A, B, C les moments d'inertie par rapport à Gx, Gy, Gz, les moments d'inertie relatifs à Ox', Oy' et Oz seront :

$$A + Ml^2, \quad B + Ml^2, \quad C,$$

en désignant la distance OG par l.

On devra donc avoir :

$$A + Ml^2 = B + Ml^2 = C,$$

d'où :

$$A = B, \quad l = \pm\sqrt{\frac{C - A}{M}}.$$

Donc l'ellipsoïde central relatif au point G doit être de révolution, et de plus il doit être aplati, auquel cas $C - A$ est positif, et l réel. Il y aura donc dans ce cas deux points O et O′ répondant à la question; ces points seront situés sur l'axe de révolution de l'ellipsoïde central relatif au centre de gravité, de part et d'autre de ce point, et à des distances égales à l.

27. *Trouver les directions des axes principaux d'inertie en un point quelconque, et les grandeurs des moments d'inertie principaux.* — Soient G le centre de gravité du

corps, A le point de ce corps pour lequel on cherche les axes principaux, AB l'un de ces axes, d sa distance au point G, α, β, γ les angles que fait AB avec les axes principaux relatifs au point G, x, y, z les coordonnées du point A rapportées à ces axes, H le moment d'inertie correspondant au point A, relativement à la droite AB. Nous aurons :

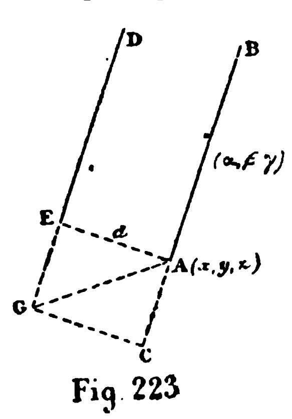


Fig. 223

$$H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma + Md^2,$$

où A, B, C sont les moments d'inertie principaux du corps relativement au point G ; en posant :

$$H = M\rho^2; \quad A = Ma^2; \quad B = Mb^2; \quad C = Mc^2.$$

ρ, a, b, c sont ce que l'on nomme les rayons de gyration correspondant aux moments d'inertie H, A, B, C; il en résulte :

$$\rho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + d^2;$$

or, on a :

$$d^2 = \overline{GA}^2 - \overline{GE}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

Posons encore :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et nous aurons :

$$\rho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + r^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

ou bien :

$$(1) \quad \rho^2 = (a^2 + r^2)\cos^2\alpha + (b^2 + r^2)\cos^2\beta + (c^2 + r^2)\cos^2\gamma - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2.$$

Nous allons chercher les valeurs de α, β, γ qui rendent ρ^2 et par suite H un maximum ou un minimum, propriété

caractéristique des axes principaux relatifs au point A; nous obtiendrons ainsi les directions en A des axes principaux d'inertie. Avec (1) nous avons la relation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2}$$

L'expression (1) de ρ^2 qui doit être maxima ou minima, est une fonction de trois variables α, β, γ, liées entre elles par la relation (2); écrivons que $d\rho^2 = 0$, et différentions en même temps (2); il viendra :

$$\begin{aligned}(3)\quad 0 = {} & (a^2 + r^2)\cos\alpha\, d.\cos\alpha + (b^2 + r^2)\cos\beta\, d.\cos\beta \\ & + (c^2 + r^2)\cos\gamma\, d.\cos\gamma \\ & - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)(x\, d.\cos\alpha + y.d\cos\beta + z\, d\cos\gamma),\end{aligned}$$

$$0 = \cos\alpha\, d.\cos\alpha + \cos\beta\, d.\cos\beta + \cos\gamma\, d.\cos\gamma. \tag{4}$$

Formons la combinaison (3) — λ(4), λ désignant un facteur indéterminé, et annulons dans cette combinaison les coefficients de $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$; nous aurons :

$$(5)\quad \begin{cases}(a^2 + r^2 - \lambda)\cos\alpha = x(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma), \\ (b^2 + r^2 - \lambda)\cos\beta = y(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma), \\ (c^2 + r^2 - \lambda)\cos\gamma = z(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma).\end{cases}$$

Multipliant les équations (5) respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et ajoutant, on trouve :

$$\begin{aligned}(a^2 + r^2)\cos^2\alpha + (b^2 + r^2)\cos^2\beta + (c^2 + r^2)\cos^2\gamma - \lambda \\ = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,\end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (1) :

$$\lambda = \rho^2.$$

Les équations (5) donneront ensuite :

$$(5\,bis)\quad \begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{x}{a^2 + r^2 - \rho^2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma), \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{y}{b^2 + r^2 - \rho^2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma), \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{z}{c^2 + r^2 - \rho^2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma).\end{cases}$$

Je multiplie ces dernières équations respectivement par x, y, z, en les ajoutant, et supprimant le facteur $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$, j'obtiens :

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \rho^2} = 1.$$

Nous avons aussi, en vertu des équations (5bis) :

$$(7) \qquad \frac{\cos \alpha}{\left(\dfrac{x}{a^2 + r^2 - \rho^2}\right)} = \frac{\cos \beta}{\left(\dfrac{y}{b^2 + r^2 - \rho^2}\right)} = \frac{\cos \gamma}{\left(\dfrac{z}{c^2 + r^2 - \rho^2}\right)}.$$

L'équation (6) est du troisième degré en ρ^2, à chacune de ses racines correspondra un axe principal dont la direction sera déterminée par les équations (7). Soit $a^2 < b^2 < c^2$.

Les trois valeurs de ρ^2 sont réelles et comprises entre $a^2 + r^2$ et $b^2 + r^2$, entre $b^2 + r^2$ et $c^2 + r^2$, et enfin entre $c^2 + r^2$ et $+\infty$. Les trois valeurs de $r^2 - \rho^2$ sont les trois paramètres λ, μ, ν des trois surfaces du second degré :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1, \\ &\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu^2} = 1, \end{aligned} \right.$$

qui sont homofocales avec l'ellipsoïde [1].

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et passent toutes les trois par le point donné $A(x, y, z)$; l'équation (9) peut s'écrire du reste :

$$(9^{bis}) \qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M}.$$

(1) Clebsch a proposé d'appeler cette surface le *second ellipsoïde central*.

L'une de ces trois surfaces est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe, et la troisième un hyperboloïde à deux nappes.

Les équations (7) montrent que les directions des axes principaux d'inertie au point A sont les normales aux trois surfaces (8), ou bien, d'après un théorème connu, les tangentes à leurs intersections mutuelles.

On a en désignant par ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2 les trois racines de l'équation (6) :

$$\lambda = r^2 - \rho_1^2; \quad \mu = r^2 - \rho_2^2; \quad \nu = r^2 - \rho_3^2,$$

d'où :

$$\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \lambda}; \quad \rho_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \mu};$$
$$\rho_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \nu}.$$

On arrive donc à ce théorème remarquable dû à Binet :

Étant donnés les axes principaux et les moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité, on obtiendra les axes principaux et les moments d'inertie principaux relativement à un autre point quelconque A, *de la manière suivante : On construira le second ellipsoïde central, et les trois surfaces du second degré qui lui sont homofocales et passent par le point donné* A; *les normales à ces surfaces seront les axes principaux du point* A; *soient* λ, μ, ν *les paramètres de ces trois surfaces, les rayons de gyration principaux en* A *seront respectivement :*

$$\sqrt{r^2 - \lambda}, \quad \sqrt{r^2 - \mu}, \quad \sqrt{r^2 - \nu}.$$

Supposons pour fixer les idées : $a > b > c$; supposons en outre que :

λ réponde à l'ellipsoïde;
μ à l'hyperboloïde à une nappe;
ν à l'hyperboloïde à deux nappes.

On a :

$$\begin{array}{lll} a^2 + \lambda > 0; & b^2 + \lambda > 0; & c^2 + \lambda > 0, \\ a^2 + \mu > 0; & b^2 + \mu > 0; & c^2 + \mu < 0, \\ a^2 + \nu > 0; & b^2 + \nu < 0; & c^2 + \nu < 0, \end{array}$$

d'où :

$$-\lambda < c^2 < -\mu < b^2 < -\nu < a^2;$$

or :

$$\rho_1^2 = r^2 - \lambda; \quad \rho_2^2 = r^2 - \mu; \quad \rho_3^2 = r^2 - \nu,$$

il en résulte donc :

$$\rho_1^2 < c^2 + r^2 < \rho_2^2 < b^2 + r^2 < \rho_3^2 < a^2 + r^2.$$

Donc le plus petit moment répond à l'ellipsoïde ; le plus grand, à l'hyperboloïde à deux nappes.

Remarque. — ρ_1^2, ρ_2^2, ρ_3^2 sont les trois racines de l'équation (6), la somme des racines est :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = 3r^2 + a^2 + b^2 + c^2.$$

Donc, la somme des moments d'inertie du point A reste constante quand ce point se meut sur une sphère ayant pour centre le centre de gravité.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

28. Dans un pareil mouvement tous les points décrivent des arcs de cercle dont les rayons sont les distances de ces points à l'axe de rotation. Soit θ l'angle décrit pendant le temps t par le rayon d'un des points; cet angle est le même pour tous les points. Soient r la distance du point considéré à l'axe, v sa vitesse, s l'arc de cercle correspondant à l'angle θ; on a :

$$s = r\theta; \qquad v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt}.$$

On représente par ω la quantité $\frac{d\theta}{dt}$, qui peut être constante ou variable, on a donc :

$$v = \omega r;$$

ω est la vitesse angulaire de la rotation à l'instant considéré; la formule précédente montre que ω est la vitesse, à l'instant considéré, des points situés à l'unité de distance de l'axe.

Considérons le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe; prenons trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, l'axe Oz coïncidant avec l'axe de rotation. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quel-

conque M du corps à l'époque t, par X, Y, Z les composantes à la même époque de la force F appliquée en M ; le mouvement du corps solide sera déterminé par l'équation des moments relative à l'axe Oz, savoir :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma (xY - yX).$$

Or, r et θ désignant les coordonnées polaires de la projection du point M sur le plan xOy, on a :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

θ est une fonction inconnue de t ; on a donc :

$$\theta = f(t); \quad \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

on aura :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

L'équation (1) donne ensuite :

$$\frac{d}{dt} \Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \Sigma (xY - yX) = \frac{d}{dt} \Sigma m r^2 \omega.$$

r^2 est constant pour chaque point matériel pendant toute la durée du mouvement ; ω est le même à chaque instant pour tous les points du corps solide ; on a donc :

$$\frac{d\omega}{dt} \Sigma m r^2 = \Sigma (xY - Yx),$$

d'où :

$$(2) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma (xY - yX)}{\Sigma m r^2}.$$

Telle est l'équation dont dépend la détermination du mouvement du corps.

On peut donner une autre forme à cette équation. La force F qui agit sur le point M, pourra être la résultante de

plusieurs autres P, P′ ...; soit Q la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'une quelconque des forces P, q la plus courte distance de la force P avec l'axe, on peut mettre l'équation (2) sous la forme (2bis) :

$$(2^{bis}) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma Qq}{\Sigma mr^2}.$$

Qq est le moment de la force P par rapport à l'axe de rotation; Σmr^2 est le moment d'inertie du corps par rapport au même axe.

Soient POA un plan perpendiculaire à l'axe, OA une droite fixe située dans ce plan; comptons les angles θ dans ce plan à partir de OA, dans un sens déterminé, celui de la flèche par exemple; on aura :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

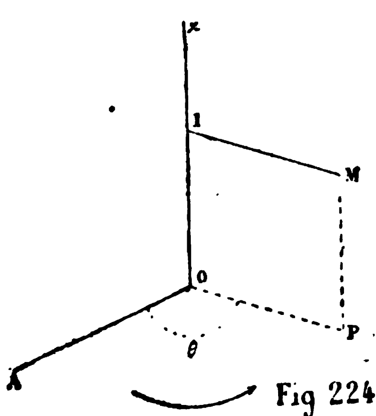


Fig 224

et dans ΣQq, on devra prendre chaque moment Qq avec le signe + ou le signe — suivant que la composante Q tend à faire tourner le corps dans le sens de la flèche ou en sens contraire.

On sait que les forces intérieures ne figurent plus dans l'équation (1); les réactions que les divers points de l'axe fixe exercent sur le corps, sont des forces qui rencontrent l'axe, et dont les moments sont nuls par rapport à cet axe; dans l'équation (2bis), ΣQq représente donc la somme algébrique des moments relativement à l'axe de rotation de toutes les forces extérieures, qui agissent sur les divers points du corps; Σmr^2 est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe fixe; de là ce théorème :

Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, la dérivée de la vitesse angulaire, par rapport au temps, est égale à la somme algébrique des moments de toutes les forces extérieures, par rapport à l'axe de rotation, cette somme étant divisée par le moment d'inertie du corps relativement au même axe.

On voit que, si la somme des moments des forces extérieures est constamment nulle, on a :

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

d'où $\omega =$ const.; le mouvement de rotation est donc uniforme. L'équation (2) peut s'écrire :

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\Sigma\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})}{\Sigma mr^2}.$$

En général, les moments des forces données varieront avec la position du corps; si ces forces extérieures ne dépendent pas du temps, leurs moments seront des fonctions connues de θ, et l'équation (3) pourra s'écrire :

$$(4) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta).$$

On en tire :

$$d\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2f(\theta)\,d\theta,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\,d\theta + \omega_0^2.$$

ω_0 étant une constante arbitraire, qui représente la valeur initiale de la vitesse angulaire, pour $t = 0$, alors que $\theta = \theta_0$, on aura ensuite :

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\,d\theta + \omega_0^2}}.$$

Si l'on peut effectuer cette quadrature :

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta + \omega_0^2}},$$

on aura t en fonction de θ, d'où θ en fonction de t.

29. Application. — *Les forces extérieures se réduisent à des attractions dirigées vers un centre fixe, et proportionnelles à la distance.*

Faisons passer l'axe des x par le centre fixe, et soit a la distance de ce centre fixe à l'axe de rotation ; on aura :

$$X = m\mu(a - x); \quad Y = -m\mu y,$$

d'où :

$$xY - yX = -m\mu\, ay,$$

$$\Sigma(xY - yX) = -\mu a\, \Sigma my = -\mu a\, My_1,$$

en désignant par y_1 l'y du centre de gravité, et par M la masse totale du corps ; on aura donc :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-\mu a\, My_1}{\Sigma mr^2}. \tag{5}$$

Posons :

$$x_1 = r_1 \cos\theta_1; \quad y_1 = r_1 \sin\theta_1; \quad \Sigma mr^2 = MK^2; \quad \frac{\mu a r_1}{K^2} = \frac{h^2}{2},$$

on aura : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$, et l'équation (5) donnera :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{h^2}{2}\sin\theta_1,$$

d'où, en multipliant par $2d\theta_1$ et intégrant :

$$\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 = h^2\cos\theta_1 + \text{const.}$$

Supposons que pour $t = 0$, $\theta_1 = \alpha_1$ et $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$; il viendra :

$$\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 = h^2 (\cos\theta_1 - \cos\alpha_1),$$

$$ht = \int_{\alpha_1}^{\theta_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{\cos\theta_1 - \cos\alpha_1}}.$$

Le rayon vecteur r_1 du centre de gravité se déplacera comme le ferait un pendule simple.

30. Notion mécanique des axes principaux d'inertie. — Prenons un corps solide attaché à un axe fixe, autour duquel il ne peut que tourner, et cherchons les résultantes des pressions supportées par cet axe; prenons deux points O et O′ sur cet axe, et ne nous occupons que de ces deux points; si ces points restent immobiles, comme le corps est solide, il en sera de même de tous les points de l'axe; nous allons chercher les pressions que le corps en mouvement exerce sur ces deux points; les réactions de ces deux points sur le corps seront égales et opposées aux pressions qu'ils supportent; soient, pour le point O, X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la réaction suivant les axes, et de même X_2, Y_2, Z_2 pour le point O′; soit $OO' = l$; en introduisant ces réactions on pourra appliquer au corps solide les équations du mouvement d'un corps solide complètement libre et écrire les équations :

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,$$

. . . .

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma (xY - yX),$$

. . . .

En mettant en évidence ce qui se rapporte aux réactions,

on trouvera :

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X + X_1 + X_2, \\ &\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y + Y_1 + Y_2, \\ &\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z + Z_1 + Z_2, \\ &\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma (yZ - zY) - lY_2, \\ &\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma (zX - xZ) + lX_2, \end{aligned}\right.$$

$$(1)\qquad \Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma (xY - yX).$$

Cette dernière équation ne contient pas les réactions; elle donne la loi du mouvement. Nous allons simplifier les équations (A). On a :

$$(2)\qquad z = \text{const.}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

$$(3)\qquad x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega;$$

par conséquent, en remarquant que r reste constant pendant toute la durée du mouvement :

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta \frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = +r\cos\theta \frac{d\theta}{dt},$$

ou bien, en tenant compte de (3) :

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt} = -\omega y; \quad \frac{dy}{dt} = +\omega x.$$

On en tire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = +x\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dx}{dt},$$

et, en ayant égard à (4) :

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x;\quad \frac{d^2y}{dt^2} = +x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y.$$

On aura ensuite, en tenant compte de (2) et (5) :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma my - \omega^2\Sigma mx,\\
&\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{d\omega}{dt}\Sigma mx - \omega^2\Sigma my,\\
&\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,\\
&\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\Sigma mz\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz + \omega^2\Sigma myz,\\
&\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \quad \Sigma mz\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma myz - \omega^2\Sigma mxz.
\end{aligned}\right.$$

Soient x_1 et y_1 les coordonnées du centre de gravité du corps à l'époque t, M la masse de ce corps; on a :

$$\Sigma mx = Mx_1;\quad \Sigma my = My_1,$$

et les équations (6) donneront :

$$\begin{aligned}
&\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = -M\left(y_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x_1\right),\\
&\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = +M\left(x_1\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y_1\right),\\
&\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.
\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (A), il viendra :

$$(7)\qquad X_1 + X_2 + \sum X + M\left(\quad y_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x_1\right) = 0,$$

$$(8)\qquad Y_1 + Y_2 + \sum Y + M\left(-x_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 y_1\right) = 0,$$

$$(9)\qquad Z_1 + Z_2 + \sum Z \qquad\qquad\qquad = 0,$$

$$(10)\quad -lY_2 + \Sigma(yZ - zY) + \frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz - \omega^2\Sigma mxy = 0,$$

$$(11)\quad +lX_2 + \Sigma(zX - xZ) + \frac{d\omega}{dt}\Sigma myz + \omega^2\Sigma mxz = 0.$$

Quand on saura intégrer l'équation (1) qui donnera le mouvement, les équations (10) et (11) donneront X_2 et Y_2; (7) et (8) donneront ensuite X_1 et Y_1 et (7) fera connaître $Z_1 + Z_2$, sans déterminer en particulier l'une des composantes; cela tient à l'hypothèse d'une rigidité absolue du corps solide, qui permet de transporter tout ou partie de la composante Z_2 du point O′ au point O.

Remarquons que X_2 et Y_2 seront en raison inverse de l.

Supposons que les forces extérieures se réduisent à un couple, dont le plan soit perpendiculaire à l'axe, et dont nous représenterons le moment par N; on aura :

$$\sum X = 0;\quad \sum Y = 0;\quad \sum Z = 0,$$
$$\Sigma(xY - yX) = N,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0,$$
$$\Sigma(zX - xZ) = 0.$$

Les équations (1), (7), (8), (9), (10) et (11) donneront donc :

$$(12)\quad \frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = N,$$

$$\left.\begin{aligned}(13)\quad & X_1 + X_2 = -M\left(y_1\frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x_1\right)\\ (14)\quad & Y_1 + Y_2 = +M\left(x_1\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y_1\right)\end{aligned}\right\}\ Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$(15)\quad lY_2 = \frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz - \omega^2\Sigma myz,$$

$$(16)\quad lX_2 = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma myz - \omega^2\Sigma mxz.$$

Demandons-nous, maintenant, s'il est possible de conserver le mouvement sans que le point O′ agisse; on devra

avoir constamment :

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0;$$

(15) et (16) donneront donc :

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz - \omega^2 \Sigma myz = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma myz + \omega^2 \Sigma mxz = 0,$$

d'où :

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \left\{ (\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2 \right\} + \omega^4 \left\{ (\Sigma myz)^2 + (\Sigma mxz)^2 \right\} = 0,$$

ou bien :

$$\left\{ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4 \right\} \left\{ (\Sigma mxz)^2 + (\Sigma myz)^2 \right\} = 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément :

(17) $$\Sigma mxz = 0; \quad \Sigma myz = 0.$$

Réciproquement, si les équations (17) ont lieu, les formules (15) et (16) nous montrent qu'on aura : $X_1 = 0$; $Y_1 = 0$.

Donc, pour que le point O′ n'agisse pas, c'est à dire pour qu'il n'éprouve aucune pression, il faut et il suffit que les équations (17) aient lieu, c'est à dire que l'axe Oz soit un axe principal d'inertie, relativement au point O. De là ce théorème :

Pour qu'un corps solide attaché à un point fixe, et sollicité par un couple agissant dans un plan perpendiculaire à une certaine droite passant par le point fixe, tourne constamment autour de cette droite, comme si elle était fixe, il faut et il suffit que cette droite soit un axe principal d'inertie relativement au point fixe.

Le mouvement continuera autour de cette droite, sans qu'il faille exercer aucun effort pour la maintenir invariable.

On peut demander aussi que le point O n'agisse pas non plus; on devra avoir alors, en outre de $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$, $Z_2 = 0$:

$$X_1 = 0; \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = 0.$$

Les équations (13) et (14) donneront :

$$y_1 \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 x_1 = 0,$$
$$x_1 \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y_1 = 0,$$

d'où :

$$(y_1^2 + x_1^2) \frac{d\omega^2}{dt^2} + \omega^4 (x_1^2 + y_1^2) = 0,$$

ou bien :

$$\left(\frac{d\omega^2}{dt^2} + \omega^4\right)(x_1^2 + y_1^2) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres :

(18) $$x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

qui montrent que l'axe OO' doit passer par le centre de gravité du corps. Réciproquement, si les équations (18) ont lieu, les équations (17) étant supposées vérifiées, on en déduira : $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$.

Nous avons vu que, si la droite Oz qui est un axe principal relativement au point O, passe par le centre de gravité, elle est aussi un axe principal relativement à ce dernier point. De là ce théorème :

Pour qu'un corps qui a commencé à tourner autour d'une certaine droite, et qui est sollicité par un couple perpendiculaire à cette droite, continue à tourner autour de cette droite, entièrement libre, comme si elle était fixe, il faut et il suffit que cette droite soit un des axes principaux qui se rapportent au centre de gravité.

Dans le premier cas, où le corps a un point fixe, les trois

axes principaux, qui s'y croisent, sont donc des axes permanents de rotation, et ce sont les seuls qui jouissent de cette propriété. Les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité, sont nommés *axes naturels de rotation.*

Toutes les conséquences précédentes subsistent évidemment quand il n'y a pas de forces extérieures; il suffit de faire $N = 0$; la vitesse angulaire ω qui était variable, dans le cas du couple, devient seulement constante.

31. Application aux meules des moulins. — La meule mobile d'un moulin offre l'exemple d'un corps solide tournant autour d'un axe auquel il n'est rattaché que par un point.

Si la meule mobile était liée invariablement à l'axe de rotation, le travail de la mouture serait très inégal; les grains de petite dimension échapperaient à l'écrasement dans l'intervalle uniforme des meules. On obtient un meilleur résultat, en laissant à la meule mobile la liberté d'osciller autour de son point d'attache; mais l'oscillation qu'elle prend doit toujours rester très faible. Pour cela, on fait en sorte que l'axe de rotation soit un axe principal au point d'attache; on centre aussi la meule, c'est à dire qu'au repos son centre de gravité doit se trouver sur la verticale du point de suspension. Cette dernière condition étant supposée d'abord seule remplie, la meule se tiendra horizontale au repos; mais, pendant le mouvement, il n'en serait de même que si la meule était entièrement homogène, ce qui n'a pas lieu en général; en prenant pour axe des z la verticale du point de suspension, on devra avoir :

$$\Sigma mxz = 0; \quad \Sigma myz = 0;$$

ce qui fera que l'axe de rotation sera un axe principal.

On ajoute à la meule de petits contrepoids qu'on peut élever ou abaisser à volonté; on peut ainsi faire varier

Σmxz, Σmyz, et arriver par tâtonnement à rendre nulles ces deux quantités.

Alors la rotation uniforme persiste autour de la verticale du point de suspension, comme si cet axe était entièrement fixe. On est averti que le réglage est convenable, par la stabilité du mouvement de la meule, quand on la fait tourner à vide.

32. Du pendule composé. — Un corps solide pesant, mobile autour d'un axe horizontal, qui ne passe pas par son centre de gravité, se met de lui-même en mouvement, quand il n'est pas dans sa position d'équilibre, c'est-à-dire, quand son centre de gravité ne se trouve pas dans le plan vertical mené par l'axe; il constitue alors un pendule composé, nous allons chercher les lois du mouvement de ce pendule.

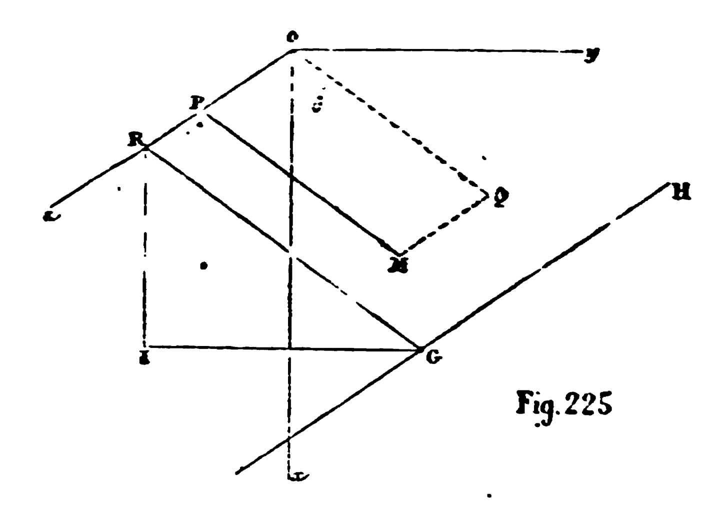


Fig. 225

Soient Oz l'axe supposé horizontal, Ox un axe vertical et dirigé vers le bas, M un point quelconque du solide, $MP = p$ sa distance à l'axe, MQ perpendiculaire sur le plan xOy, $\theta = xOQ$, Σmp^2 le moment d'inertie du corps par

rapport à l'axe Oz; on aura pour déterminer le mouvement du corps solide l'équation :

$$(a) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma mp^2 = \Sigma(xY - yX),$$

θ étant l'angle xOQ compté positivement de x vers y. Ici, on a en désignant par m la masse du point M :

$$Y = 0, \quad X = mg.$$

L'équation (a) peut donc être mise sous la forme :

$$(b) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}\Sigma mp^2 = -g\Sigma my.$$

Soit y_1 la valeur de y qui répond au centre de gravité; on aura en désignant par M la masse du corps :

$$\Sigma my = My_1 = Ma \sin\theta_1,$$

θ_1 désignant la valeur de θ qui répond au centre de gravité G, et a la distance de ce centre de gravité à l'axe de suspension; en remarquant que $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$, il viendra donc:

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2}\Sigma mp^2 = -gMa\sin\theta_1.$$

Soit MK^2 le moment d'inertie du corps par rapport à la parallèle à Oz menée par le centre de gravité; on aura, comme on sait :

$$(2) \qquad \Sigma mp^2 = Ma^2 + MK^2.$$

Donc, l'équation (1) deviendra :

$$(3) \qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{a + \frac{K^2}{a}}\sin\theta_1.$$

Considérons un pendule simple de longueur $l = a + \frac{K^2}{a}$;

on sait que les lois de l'oscillation d'un pareil pendule sont données par la formule :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Le pendule composé oscillera donc comme le pendule simple de longueur l, si à un certain instant on a :

$$\theta_1 = \theta, \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt};$$

l'égalité de ces deux angles se maintiendra pendant tout le mouvement. Le pendule simple de longueur l se nomme le *pendule synchrone*.

Lorsque le pendule composé fera de très petites oscillations, il en sera de même du pendule simple, et la durée T de ces oscillations sera :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{où} \quad l = a + \frac{K^2}{a}.$$

On voit que pour calculer T, il faudra connaître a et K, ou bien la distance du centre de gravité à l'axe de suspension, et le moment d'inertie du corps relativement à un axe passant par le centre de gravité, parallèlement à l'axe de suspension.

33. Application au pendule de Borda. — Ce pendule se composait d'une sphère CA en platine, de rayon R et d'un fil métallique OA très fin, dont on pouvait négliger la masse, attaché au point fixe O; soit $OC = a$; le point C peut être considéré comme le centre de gravité du pendule composé; l'axe de suspension passera en O; soit M la masse de la sphère; le moment d'inertie MK^2 de cette sphère par rapport à un axe parallèle à l'axe de suspension, passant par le point C,

O
A
C
Fig 226

est, comme on sait :

$$MK^2 = \frac{2MR^2}{5};$$

on a donc :

$$K^2 = \frac{2R^2}{5},$$

et par suite :

$$l = a + \frac{2R^2}{5a}.$$

Borda prenait :

$$a = 1^m, \quad R = 0^m,025,$$

il avait donc :

$$\frac{2R^2}{5a} = 0^{mm},25.$$

Ainsi la longueur du pendule simple faisant ses oscillations dans le même temps que le pendule de Borda ne différait de OC que de $\frac{1}{4}$ de millimètre.

Si l'on trace dans l'intérieur du pendule composé, au dessous de son centre de gravité, et dans le plan de ce centre G et de l'axe de rotation, une droite AB parallèle à l'axe, dont l soit la distance AR à cet axe, le mouvement des points de cette droite AB ne sera ni accéléré ni retardé par leur liaison avec les autres points du corps. Parmi tous les points de cette droite, on appelle proprement *centre d'oscillation* le point A situé sur la même perpendiculaire à l'axe que le centre de gravité, tandis qu'on nomme la droite AB axe d'oscillation.

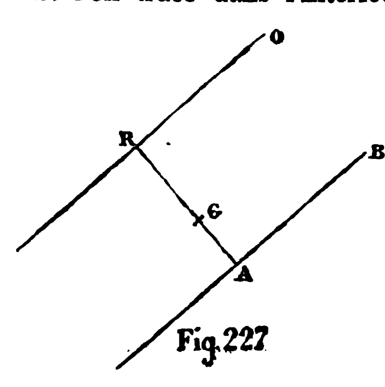


Fig. 227

On a :

$$RG = a, \quad AR = l = a + \frac{K^2}{a};$$

on en conclut :

$$GA = \frac{K^2}{a}.$$

Les axes de suspension et d'oscillation sont réciproques; c'est à dire que si l'on faisait osciller le corps autour de AB, OR deviendrait l'axe d'oscillation. Soit en effet l' la longueur du pendule simple oscillant de la même manière que le nouveau pendule composé, on aura :

$$l' = AG + \frac{K^2}{AG},$$

car AG remplace a; mais, à cause de $AG = \frac{K^2}{a}$, on aura :

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

Donc, les divers points de la droite OR oscilleront dans le même temps que s'ils étaient affranchis de leur liaison avec les autres points du corps; OR est le nouvel axe d'oscillation. (On peut définir l'axe d'oscillation : une droite dont chaque point se meut comme s'il ne faisait pas partie du corps et était simplement lié à l'axe par une droite rigide et sans masse.)

La durée des oscillations très petites autour des deux axes OR et AB, est la même et égale à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, l désignant la distance AR des deux axes.

Réciproquement, si la durée des oscillations très petites, autour des deux axes parallèles, dont le plan contient le centre de gravité G, et qui n'en sont pas équidistants est la même, leur distance mutuelle sera la longueur l du pendule simple synchrone.



En effet, soient a et a' les distances inégales du centre de gravité à ces deux droites parallèles, et conséquemment $a + a'$ leur distance mutuelle; soit aussi MK^2 le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité; puisque la durée des oscillations est la même autour des deux droites, il faudra que l'on ait :

$$a' + \frac{K^2}{a'} = a + \frac{K^2}{a},$$

équation du second degré en a', dont les racines sont :

$$a' = a \quad \text{et} \quad a' = \frac{K^2}{a}.$$

Les deux axes n'étant pas équidistants du centre de gravité, la solution $a' = a$ doit être rejetée, et il reste seulement $a' = \frac{K^2}{a}$; donc, la distance des deux axes qui est $a + a'$ sera égale à $a + \frac{K^2}{a} = l$. Donc, si l'on mesure la distance $a + a'$ des deux axes synchrones, on aura la longueur du pendule simple qui correspond à la durée commune de leurs oscillations.

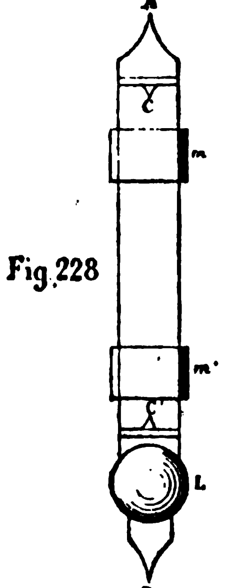


Fig. 228

34. Pendule à réversion de Kater. — Il consiste en une règle en laiton, portant deux couteaux C et C' autour desquels on peut la faire osciller successivement; la règle se termine par deux aiguilles A et B qui aident à compter les oscillations par la méthode des coïncidences; L est une lentille dont la masse est considérable, et tellement placée que le centre de gravité du système ne coïncide pas avec le milieu de CC', m et m'

sont deux curseurs que l'on déplace le premier à la main, le second avec une vis de rappel. Dans toutes les positions, le plan mené par les arêtes des couteaux C et C′ doit contenir le centre de gravité du système.

On suspend l'appareil par le couteau C, on le fait osciller et on compte le nombre n des petites oscillations dans un temps donné t; on le retourne, et on fait osciller autour de C′; on compte le nombre n' des oscillations effectuées dans le même temps t; on donne aux oscillations la même amplitude dans les deux cas; on déplace les masses m et m' jusqu'à ce que, par des tâtonnements successifs, on arrive à avoir $n' = n$; alors, la longueur l du pendule simple synchrone est la distance CC′ des arêtes des couteaux.

Il y a une infinité d'axes autour desquels les petites oscillations d'un même corps pesant sont d'égale durée.

D'abord, il est évident que cela a lieu pour tous les axes de suspension parallèles entre eux, et équidistants du centre de gravité, puisque pour tous ces axes, a et MK^2, par suite a et K^2, donc l, restent les mêmes.

On peut aussi changer la direction de ces axes et leur distance au centre de gravité, sans que la valeur de l soit changée; car, si l'on appelle α, β, γ les angles que la parallèle à l'axe de suspension, menée par le centre de gravité, fait avec les axes principaux d'inertie qui se coupent en ce point, on aura, en désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux, pour le centre de gravité :

$$MK^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

donc :

$$l = a + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{Ma}. \tag{6}$$

On peut évidemment donner à a, α, β, γ une infinité de valeurs différentes pour lesquelles cette valeur de l restera

la même. (Il est bien entendu qu'un axe de suspension étant déterminé, on doit ensuite le rendre horizontal.)

Axe de la plus courte oscillation. — Il faut déterminer a, α, β, γ de manière que la longueur l soit la plus petite possible. Soit $A < B < C$; lorsque α, β, γ prennent toutes les valeurs possibles, le minimum de

$$A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$

est A; on l'obtient en prenant :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 90^\circ;$$

on est ensuite ramené à trouver le minimum de

$$l = a + \frac{A}{Ma},$$

ce minimum a lieu pour

$$a = \sqrt{\frac{A}{M}}; \quad \text{alors} \quad l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}.$$

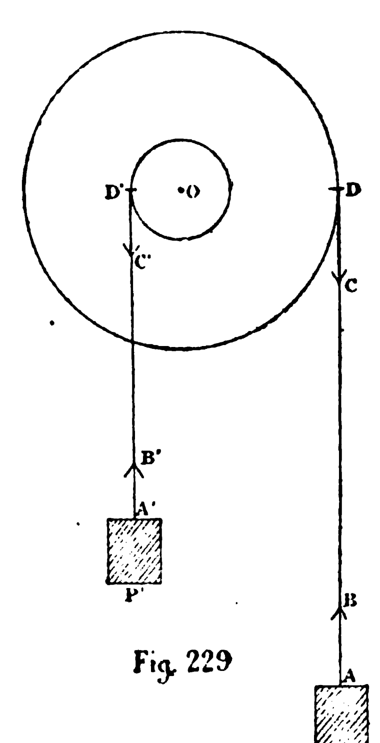


Fig. 229

35. Mouvement du treuil. — Considérons un treuil mobile autour d'un axe horizontal O, sur lequel sont calés deux tambours ayant cette droite pour axe; sur chaque tambour est enroulée une corde qui y est fixée par un bout, et qui tient suspendu à l'autre bout un poids connu. On demande la loi du mouvement, en supposant que le centre de gravité soit sur l'axe O, et qu'on néglige les frottements des tourillons sur leurs coussinets, le poids et la raideur des cordes.

Soient Q le poids du treuil, T et T′ les tensions inconnues des cordes, $AB = CD = T$; $A'B' = C'D' = T'$, v et v' les vitesses des poids P et P′, ρ le rayon de giration du treuil relativement à son axe, en sorte que $\frac{Q\rho^2}{g}$ soit son moment d'inertie.

On peut étudier séparément :

1° Le mouvement rectiligne du poids P, soumis aux forces verticales P et T;

2° Le mouvement de P′ soumis aux forces P′ et T′;

3° Le mouvement de rotation du treuil, soumis aux forces $DC = T$ et $D'C' = T'$.

Soit ω la vitesse angulaire de rotation du treuil, $OD = R$, $OD' = R'$. On aura :

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = P - T, \tag{1}$$

$$\frac{P'}{g}\frac{dv'}{dt} = T' - P', \tag{2}$$

$$\frac{Q}{g}\rho^2\frac{d\omega}{dt} = TR - T'R', \tag{3}$$

$$v = \omega R, \tag{4}$$

$$v' = \omega R'. \tag{5}$$

(1) et (4) donnent :

$$T = P\left\{1 - \frac{R}{g}\frac{d\omega}{dt}\right\}, \tag{6}$$

(2) et (5) :

$$T' = P'\left\{1 + \frac{R'}{g}\frac{d\omega}{dt}\right\}. \tag{7}$$

En reportant dans (3), on trouve, après réduction :

$$\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{PR - P'R'}{PR^2 + P'R'^2 + Q\rho^2}. \tag{8}$$

$\frac{d\omega}{dt}$ est constant; supposons que, pour $t = 0$, $\omega = 0$, on aura :

$$\omega = gt \frac{PR - P'R'}{PR^2 + P'R'^2 + Q\rho^2},$$

ou :

$$\omega = Kgt, \tag{9}$$

K ayant pour valeur :

$$K = \frac{PR - P'R'}{PR^2 + P'R'^2 + Q\rho^2}, \tag{10}$$

$$v = KRgt; \quad x = \frac{1}{2} KRgt^2,$$

$$v' = KR'gt; \quad x' = \frac{1}{2} KR'gt^2,$$

x et x' désignant les quantités dont descendent et montent pendant le même temps t les poids P et P′, dont le mouvement est, comme on voit, uniformément accéléré.

Machine d'Atwood. — Pour passer à la machine d'Atwood il suffit de faire $R = R'$ dans les formules précédentes; on a alors, en posant :

$$h = R^2 \frac{P - P'}{R^2 (P + P') + Q\rho^2},$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{h}{R} gt = \frac{1}{R} g' t, \\ v = v' &= hgt = g't, \\ x = x' &= \frac{1}{2} hgt^2 = \frac{1}{2} g' t^2, \end{aligned}\right\} \quad g' = gh.$$

Si P — P′ est très petit, il en sera de même de l'accélération g'.

Les poids P et P′ sont connus, ainsi que R; ρ peut être calculé aisément; on peut calculer x et t; on a alors :

$$g = \frac{2x \left\{ R^2 (P + P') + Q\rho^2 \right\}}{R^2 (P - P') t^2}.$$

On peut donc calculer g, mais on n'a pas la même précision qu'avec le pendule.

36. PROBLÈME. — *Un cylindre circulaire droit homogène est placé horizontalement sur un plan incliné parfaitement poli; un fil sans masse, fixé par une de ses extrémités au contour du cylindre, s'enroule sur le corps suivant la section droite qui contient le centre de gravité, et s'attache par l'autre extrémité à un point fixe situé dans le plan de cette section, à une hauteur au-dessus du plan incliné égale au rayon du cylindre. Le fil étant complètement enroulé, on abandonne le cylindre à son poids. Déterminer, pour une position donnée, la tension* T *du fil, et la vitesse avec laquelle décroît l'angle* θ *que le fil fait avec le plan incliné.*

Soient a le rayon du cylindre, M sa masse, MK^2 son moment d'inertie par rapport à son axe, et α l'inclinaison du plan sur l'horizon. Soit I le point de suspension, $IC = a$; la figure 230 représente les choses à l'origine du mouvement, la figure 231 à l'époque t; prenons CA pour axe des x, C pour origine; le point du cylindre qui était d'abord en I, est venu en K, et l'on a :

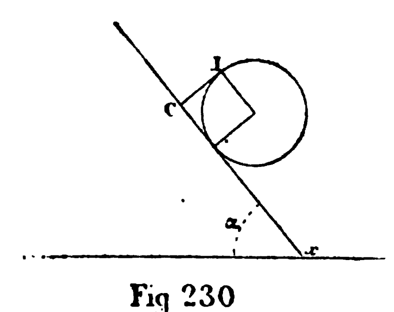


Fig 230

$$\text{arc BK} = \text{BI} = \cot\theta,$$

$$\text{arc BL} = a\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$\text{arc LK} = a\left(\theta + \cot\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$

(1) $$\text{LOK} = \theta' = \theta + \cot\theta - \frac{\pi}{2}.$$

θ' est l'angle dont on a tourné le cylindre, dans le mouve-

ment relatif autour du centre de gravité O, par rapport à la direction fixe OI; ω désignant la vitesse angulaire de ce mouvement de rotation, on aura :

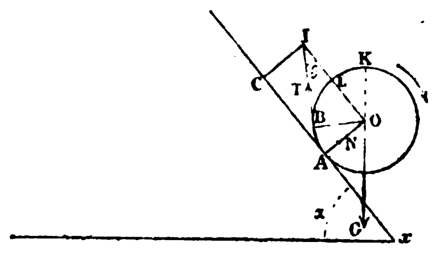


Fig 231

$$\omega = \frac{d\theta'}{dt},$$

ou, en remplaçant θ' par sa valeur (1) :

$$(2) \quad \omega = \left(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

Les forces agissantes sont : la tension du fil $BT = T$, la réaction normale $AN = N$ du plan; elle passe par le centre O du cercle, et le poids $OG = Mg$ du cylindre. Soit $CA = OI = x$ l'abscisse du centre de gravité; on aura pour déterminer le mouvement de ce centre de gravité l'équation :

$$(3) \qquad M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin\alpha - T\cos\theta.$$

On a du reste :

$$(4) \qquad x = \frac{a}{\sin\theta}.$$

On aura enfin, pour déterminer la rotation du cylindre dans le mouvement relatif autour de son axe :

$$MK^2\frac{d\omega}{dt} = Ta,$$

ou bien, en remplaçant ω par sa valeur (2) :

$$(5) \qquad Ta = M^2K\frac{d}{dt}\left\{\left(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}\right\};$$

(3), (4) et (5) déterminent x, θ et T en fonction du temps; on tire de (3) et (4), en ayant égard à l'expression (5) de T :

$$(6) \qquad \frac{d^2\dfrac{1}{\sin^2\theta}}{dt^2} = \frac{g}{a}\sin\alpha - \frac{K^2}{a^2}\cos\theta\,\frac{d}{dt}\left\{\left(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}\right\}.$$

Cette dernière équation, qui va déterminer θ, est du second ordre; elle ne contient pas t explicitement; on posera donc pour la ramener au premier ordre :

$$\frac{d\theta}{dt} = u, \tag{7}$$

et l'on éliminera dt entre (6) et (7), ce qui donnera successivement :

$$u\left[\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\theta} - u\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\right)\right] = -\frac{g\sin\alpha}{a} + \frac{K^2}{a^2}u\cos\theta\left(-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\frac{du}{d\theta} + \frac{2u\cos\theta}{\sin^3\theta}\right),$$

d'où, en multipliant par 2 :

$$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2\theta\right)\frac{d.u^2}{d\theta} - \frac{2}{\sin^3\theta}\left[\sin^2\theta + 2\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\right)\cos^2\theta\right]u^2 = -\frac{2g\sin\alpha}{a},$$

$$\frac{d.u^2}{d\theta} - 2u^2\frac{\sin^2\theta + 2\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\right)\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2\theta\right)} = -\frac{2g\sin\alpha}{a}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2\theta\right)},$$

ou bien en faisant :

$$P = 2\frac{\sin^2\theta + 2\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\right)\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2\theta\right)},$$

$$Q = \frac{2g\sin\alpha}{a}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2\theta\right)},$$

$$\frac{d.u^2}{d\theta} - Pu^2 = -Q,$$

équation linéaire relativement à u^2; on en tire en intégrant :

$$(8) \qquad u^2 = e^{\int P d\theta} \left\{ \frac{2C}{a} g \sin \alpha - \int e^{-\int P d\theta} Q \, d\theta \right\},$$

C désignant une constante arbitraire. On a ensuite :

$$\int P d\theta = 2 \int \frac{2\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\right) + \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \frac{K^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \theta} \frac{d.\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta} = \int \frac{2h + z}{h + z} \frac{dz}{z},$$

en faisant :

$$z = \operatorname{tg}^2 \theta; \quad h = 1 + \frac{K^2}{a^2}.$$

Or :

$$\frac{2h + z}{z(h + z)} = \frac{2}{z} - \frac{1}{h + z};$$

donc :

$$\int P \, d\theta = \log \left(\frac{z^2}{h + z}\right) = \log \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{1 + \frac{K^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

$$e^{\int P d\theta} = \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{1 + \frac{K^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

(8) donnera ensuite, après réduction :

$$u^2 = \frac{\operatorname{tg}^4 \theta}{1 + \frac{K^2}{a^2} + \operatorname{tg}^2 \theta} \left\{ \frac{2C}{a} g \sin \alpha - \frac{2g \sin \alpha}{a} \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sin^2 \theta} \right\},$$

ou bien, en effectuant les calculs, et remplaçant u par sa valeur (7) :

$$(9) \qquad u^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2ga \sin^3 \theta \,(1 + C \sin \theta)}{\cos^2 \theta \,(a^2 + K^2 \cos^2 \theta)}.$$

La formule (4) donnera :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{dt},$$

En remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur tirée de (9), et prenant le signe —, puisque θ va en décroissant, on trouvera :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g\,a \sin \alpha}\,\frac{a}{\sin \theta}\sqrt{\frac{1 + C \sin \theta}{a^2 + K^2 \cos^2 \theta}}.$$

A l'origine du mouvement, la vitesse du centre de gravité est nulle, $\theta = \frac{\pi}{2}$; la formule ci-dessus donne donc :

$$0 = a\sqrt{2ga \sin \alpha}\sqrt{\frac{1 + C}{a^2}},$$

donc :

$$C = -1,$$

et l'équation (9) devient :

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2ga \sin \alpha \sin^2 \theta\,(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta\,(a^2 + K^2 \cos^2 \theta)}; \tag{10}$$

pour $t = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a donc, en remarquant que

$$\frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta\,(1 + \sin \theta)} = \frac{1}{1 + \sin \theta},$$

se réduit à $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = -\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{a}}.$$

On aura ensuite, en partant de la formule (2) :

$$\omega = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{a}}\cos \theta\sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{\sin \theta\left(1 + \frac{K^2}{a^2}\cos^2 \theta\right)}}. \tag{11}$$

Enfin, la formule (5) donnera :

$$Ta = MK^2 u \frac{d}{d\theta}\left\{\left(1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}\right)u\right\} = MK^2\left\{\frac{4u^2}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{d.u^2}{d\theta}\right\}\frac{\cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{d.u^2}{d\theta}$ par sa valeur tirée de (8), et ensuite u^2 par sa valeur (9) :

$$(12)\quad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{MK}^2 g \sin\alpha \cos\theta}{(a^2 + \mathrm{K}^2 \cos\theta)^2} \left\{ a^2 (1 + 2\sin^2\theta - 2\sin^3\theta) + \mathrm{K}^2 \cos^2\theta \right\}.$$

Le problème est donc résolu finalement par les formules suivantes :

$$(\mathrm{A})\qquad t\sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{a}} = \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\sqrt{1 + \frac{\mathrm{K}^2}{a^2}\cos^2\theta}}{\sin\theta\sqrt{\sin\theta\,(1 - \sin\theta)}}\,d\theta,$$

$$(\mathrm{B})\qquad x = \frac{a}{\sin\theta},$$

$$(\mathrm{C})\qquad \omega = \sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{a}}\cos\theta\sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{\sin\theta\left(1 + \frac{\mathrm{K}^2}{a^2}\cos^2\theta\right)}}.$$

L'équation (A) donne θ en fonction de t (en prenant $\sin\theta$ pour nouvelle variable, on verra aisément que t s'exprime à l'aide de cette nouvelle variable par une intégrale elliptique); les équations (B) et (C) donneront ensuite x et ω en fonction de θ; enfin, la formule (12) fera connaître la tension T.

CHAPITRE V

ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE. MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

37. Énoncé d'un problème. — *Un corps solide quelconque est lié à un point fixe autour duquel il ne peut que tourner; les divers points du corps sont sollicités par des forces données; l'état initial du corps est connu; il faut déterminer à une époque quelconque les positions des divers points du corps.*

Pour y arriver, on choisit trois droites rectangulaires Ox, Oy, Oz passant par le point fixe et liées invariablement au corps; la question sera résolue si l'on parvient à déterminer à une époque quelconque la position de ces trois axes par rapport à trois axes rectangulaires fixes OX, OY, OZ passant également par le point fixe; car, si x, y, z, X, Y, Z désignent les coordonnées d'un même point du corps, dans les deux systèmes d'axes, on aura :

$$(1) \qquad \begin{cases} X = a\,x + b\,y + c\,z, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Pour un point déterminé du corps x, y, z sont des constantes; les 9 cosinus qui entrent dans les formules (1) sont à un moment donné les mêmes pour tous les points du corps, mais ils varient avec le temps. Si l'on arrive à déterminer ces 9 cosinus en fonction du temps, le problème sera résolu.

38. Introduction des trois angles d'Euler. — On sait qu'il existe six relations distinctes entre les 9 cosinus, qui dépendent par conséquent de trois variables seulement. Traçons une sphère de rayon 1, ayant pour centre le point fixe O, et marquons les points X, Y, Z, x, y, z où cette sphère est percée par nos deux systèmes d'axes. Considérons un mobile en mouvement sur l'arc de grand cercle xy, dans le sens xy; ce mobile rencontrera le grand cercle XY en deux points N et N′, qui sont les nœuds du cercle xy relativement à XY; soit N celui des nœuds par où passe le mobile, en passant de l'hémisphère XYZ à l'autre XYZ′; ce sera le nœud descendant, le seul dont nous nous occuperons; on pose :

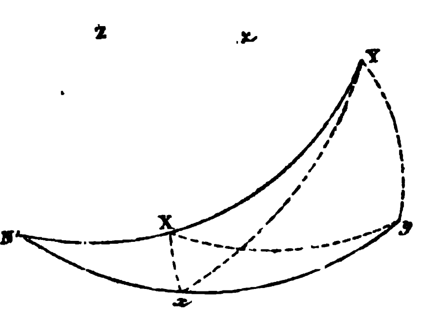


Fig 232

Z′

$$XN = \psi; \quad Nx = \varphi; \quad XNx = \theta.$$

ψ se compte positivement, à partir de X, en sens inverse de XY et varie de 0 à 360°.

φ se compte positivement de N vers x, de 0 à 360°; donc, dans le sens de xy.

Enfin, l'angle θ est compté au-dessous du plan XY, et varie de 0 à 180°.

Ces trois angles déterminent sans ambiguïté la position des axes Ox, Oy, Oz.

Expression des 9 cosinus en fonction de ψ, φ, θ. — On a :

$$a = \cos(X, x).$$

On considère le triangle sphérique XNx, dans lequel on a :

$$XN = \psi; \quad xN = \varphi; \quad XNx = \theta;$$

en appliquant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, on trouve :

(A) $$a = \cos(X, x) = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

En changeant dans cette formule φ en $\varphi + 90°$, on aura :

(B) $$b = \cos(X, y) = -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta.$$

En changeant dans (A) ψ en $\psi + 90°$, on aura :

(C) $$a' = \cos(Y, z) = -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta.$$

En changeant dans (C) φ en $\varphi + 90°$, il viendra :

(D) $$b' = \cos(Y, y) = \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta.$$

On trouvera c, c', c'', a'', b'' par la considération des triangles sphériques XNz, YNz, ZNx, ZNy, dans lesquels on a :

$$\begin{array}{lll} XN = \psi; & zN = 90°; & zNX = 90° - \theta; \\ YN = \psi + 90°; & zN = 90°; & zNY = 90° - \theta; \\ xN = \varphi; & ZN = 90°; & ZNx = 90° + \theta; \\ yN = \varphi + 90°; & ZN = 90°; & ZNy = 90° + \theta; \end{array}$$

et on aura le tableau suivant, pour les formules cherchées :

(2) $$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} a = & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a' = & -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a'' = & -\sin\varphi\sin\theta, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{ll} b = & -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ b' = & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ b'' = & -\cos\varphi\sin\theta, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} c = \sin\psi\sin\theta, \\ c' = \cos\psi\sin\theta, \\ c'' = +\cos\theta. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Le problème revient donc à la détermination de ψ, φ, θ en fonction du temps. Il serait difficile et compliqué d'aborder ainsi directement le problème.

39. Introduction des variables auxiliaires p, q, r. — On sait que, lorsqu'un corps solide tourne autour d'un point fixe, son mouvement est à chaque instant un mouvement de rotation autour d'une certaine droite que l'on nomme l'axe instantané. Soient, à l'époque t, OI la position de cet axe instantané, ω la vitesse angulaire de rotation; on choisit le demi-diamètre OI de manière qu'un observateur couché sur OI, les pieds en O et la tête en I, voie la rotation s'effectuer dans le sens direct. On sait qu'on peut remplacer la rotation autour de OI par trois rotations autour de trois droites formant un angle trièdre ayant son sommet en O, et que, pour le faire, il suffira de porter la longueur ω sur OI et de déterminer le parallélipipède ayant ω pour diagonale, et dont les arêtes soient dirigées suivant les arêtes du trièdre; les longueurs des arêtes du parallélipipède obtenu seront les rotations composantes.

Ainsi, en particulier, on pourra décomposer la rotation ω en trois autres dirigées suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz liés au corps; soient p, q, r les vitesses angulaires de ces rotations, on aura :

$$p = \omega \cos(\mathrm{I}, x); \quad q = \omega \cos(\mathrm{I}, y); \quad r = \omega \cos(\mathrm{I}, z); \quad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

et inversement :

$$\cos(\mathrm{I}, x) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}; \quad \cos(\mathrm{I}, y) = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}};$$

$$\cos(\mathrm{I}, z) = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Si l'on connaissait p, q, r en fonction du temps, on pourrait, à une époque quelconque déterminer la position

de l'axe instantané OI relativement aux axes Ox, Oy, Oz et la vitesse ω de la rotation.

La rotation ω autour de OI peut aussi être décomposée en trois autres : une rotation λ autour de OZ, μ autour de Oz, ν autour de ON.

Le segment ω est la résultante géométrique des trois segments λ, μ, ν; sa projection sur une droite quelconque est donc la somme des projections de λ, μ, ν sur cette droite; en projetant de la sorte sur Ox, Oy, Oz on trouvera :

$$p = \lambda \cos(Z, x) + \mu \cos(z, x) + \nu \cos(N, x),$$
$$q = \lambda \cos(Z, y) + \mu \cos(z, y) + \nu \cos(N, y),$$
$$r = \lambda \cos(Z, z) + \mu \cos(z, z) + \nu \cos(N, z),$$

ou bien, en remplaçant les cosinus par leurs expressions données plus haut :

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} p = -\lambda \sin\theta \sin\varphi + \nu \cos\varphi, \\ q = -\lambda \sin\theta \cos\varphi - \nu \sin\varphi, \\ r = \quad \lambda \cos\theta \qquad\quad + \mu. \end{cases}$$

Afin de pouvoir raisonner, supposons :

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \nu > 0.$$

Dans la rotation infiniment petite $\lambda \Delta t$ autour de OZ, le point z reste à une distance constante de Z; la figure $zNxy$ se meut comme un corps solide; Nx reste le même; donc cette rotation n'altère ni θ ni φ; le point N vient en N', et l'on a :

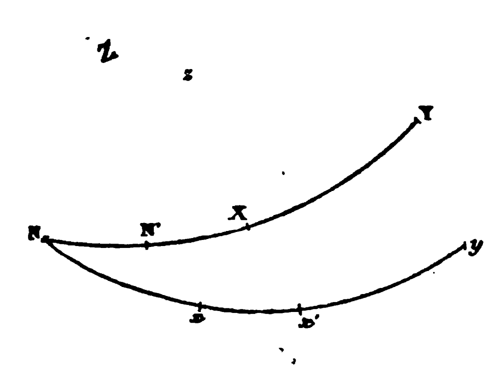


Fig. 233

$$NN' = +\lambda \Delta t.$$

En désignant par $\Delta\psi$ la variation de ψ, on aura, en tenant compte du sens dans

lequel ψ est compté :

$$\Delta\psi = -\,NN';$$

donc :

$$\Delta\psi = -\lambda\,\Delta t; \quad \Delta\varphi = 0; \quad \Delta\theta = 0.$$

Dans la seconde rotation $\mu\Delta t$ autour de Oz, le grand cercle xy glisse sur lui-même ; le point N reste fixe, ψ et θ ne changent pas ; le point x vient en x', et l'on a :

$$xx' = +\,\mu\,\Delta t; \quad \Delta\varphi = +\,xx';$$

donc :

$$\Delta\psi = 0; \quad \Delta\varphi = +\,\mu\,\Delta t; \quad \Delta\theta = 0.$$

Enfin, dans la dernière rotation $\nu\Delta t$ autour de ON, le point N restant immobile, ψ ne change pas ; il en est de même de φ ; quant à θ, il diminue de $\nu\Delta t$; on a donc :

$$\Delta\psi = 0; \quad \Delta\varphi = 0; \quad \Delta\theta = -\,\nu\,\Delta t.$$

En réunissant les trois séries de variations trouvées ci-dessus pour ψ, φ et θ, on trouvera :

$$\Delta\psi = -\,\lambda\,\Delta t; \quad \Delta\varphi = +\,\mu\,\Delta t; \quad \Delta\theta = -\,\nu\,\Delta t,$$

pour les accroissements infiniment petits de ψ, φ et θ, produits par les trois rotations considérées, ou, ce qui revient au même, par la rotation $\omega\Delta t$ effectuée autour de OI.

D'où, en faisant tendre Δt vers zéro :

$$\lambda = -\frac{d\psi}{dt}; \quad \mu = +\frac{d\varphi}{dt}; \quad \nu = -\frac{d\theta}{dt},$$

les formules (α) donnent donc :

$$\begin{aligned} p &= \sin\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi\,\frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \cos\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \quad -\cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

d'où :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &p\sin\varphi + q\cos\varphi = \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},\\ &q\sin\varphi - p\cos\varphi = \frac{d\theta}{dt},\\ &\frac{d\varphi}{dt} = r + \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} = r + \operatorname{cotg}\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi).\end{aligned}\right.$$

Telles sont les relations cherchées entre φ, ψ, θ, p, q, r.

41. Détermination des projections u, v, w de la vitesse d'un point quelconque du corps solide sur les axes Ox, Oy, Oz (positions de ces axes à l'époque t).

Les positions Ox, Oy, Oz de ces axes à l'époque t deviennent Ox', Oy', Oz' à l'époque $t' = t + dt$.

Soient M la position d'un point quelconque du corps à l'époque t, x, y, z ses coordonnées relatives aux axes Ox, Oy, Oz; à l'époque $t + dt$, ce point est venu en M'; ses coordonnées relativement aux axes Ox', Oy', Oz' sont encore x, y, z; mais, relativement aux axes Ox, Oy, Oz elles seront : $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, et l'on aura :

$$\delta x = u\,dt; \quad \delta y = v\,dt; \quad \delta z = w\,dt.$$

On peut obtenir ces accroissements sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta_1 x + \delta_2 x + \delta_3 x,\\ \delta y &= \delta_1 y + \delta_2 y + \delta_3 y,\\ \delta z &= \delta_1 z + \delta_2 z + \delta_3 z,\end{aligned}$$

les δ_1 désignant les accroissements infiniment petits des coordonnées x, y, z répondant à la rotation infiniment petite $p\,dt$ autour de Ox; de même δ_2 et δ_3 répondant aux rotations $q\,dt$ et $r\,dt$ autour de Oy et Oz.

Calculons par exemple les δ_3; pour le point x, y, z, on a :

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = z,$$

ρ désignant la distance du point x, y, z à l'axe Oz. Dans la rotation $r\,dt$ autour de Oz, z et ρ restent les mêmes, ω augmente de $\delta\omega = r\,dt$; on a :

$$\delta_3 x = -\rho \sin\omega\,\delta\omega; \quad \delta_3 y = +\rho\cos\omega\,\delta\omega; \quad d_3 z = 0,$$

ou bien :

$$\delta_3 x = -y\,r\,dt; \quad \delta_3 y = +x\,r\,dt; \quad \delta_3 z = 0.$$

On en déduit, par des permutations circulaires ;

$$\delta_1 y = -z\,p\,dt; \quad \delta_1 z = +y\,p\,dt; \quad \delta_1 x = 0,$$
$$\delta_2 z = -x\,q\,dt; \quad \delta_1 x = +z\,q\,dt; \quad \delta_1 y = 0,$$

et par suite :

$$\text{(E')} \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= (qz - ry)\,dt, \\ \delta y &= (rx - pz)\,dt, \\ \delta z &= (py - qx)\,dt. \end{aligned} \right.$$

Donc :

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= qz - ry, \\ v &= rx - pz, \\ w &= py - qx. \end{aligned} \right.$$

42. Expression de la force vive du système solide à l'époque t, à l'aide des variables p, q, r. — Soit V la vitesse du point M, on a :

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

et en remplaçant u, v, w, par leurs valeurs (5) :

$$V^2 = p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) + r^2(x^2 + y^2) \\ - 2qr\,yz - 2rp\,xz - 2pq\,xy.$$

D'où, comme à un instant donné, p, q, r sont les mêmes pour tous les points du corps.

$$\Sigma m\,V^2 = p^2\,\Sigma m(y^2 + z^2) + q^2\,\Sigma m(z^2 + x^2) + r^2\,\Sigma m(x^2 + y^2) \\ - 2qr\,\Sigma myz - 2pr\,\Sigma mxz - 2pq\,\Sigma mxy.$$

Cette expression se simplifie beaucoup, si l'on prend pour

Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie du corps, qui répondent au point fixe O, ce que nous ferons toujours désormais. On aura, en effet :

$$(D) \qquad \Sigma myz = 0; \quad \Sigma mxz = 0; \quad \Sigma mxy = 0,$$

et, en désignant par A, B, C les moments d'inertie principaux du corps solide, relatifs au point fixe O :

$$(E) \quad \Sigma m(y^2 + z^2) = A; \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = B; \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C.$$

Il en résulte :

$$(6) \qquad \Sigma m\, V^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

43. Détermination, relativement aux positions Ox, Oy, Oz, qu'occupent à l'époque t les axes principaux, de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement des divers points du corps solide. — Soient A', B', C' les projections de l'axe de ce couple sur Ox, Oy, Oz; on aura :

$$A' = \Sigma m(yw - zv),$$
$$B' = \Sigma m(zu - xw),$$
$$C' = \Sigma m(xv - yu),$$

ou bien, en remplaçant u, v, w par leurs valeurs (5) :

$$A' = \Sigma m \left\{ p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \right\},$$
$$B' = \Sigma m \left\{ q(z^2 + x^2) - ryz - pxy \right\},$$
$$C' = \Sigma m \left\{ r(x^2 + y^2) - pzx - qzy \right\},$$

ce qui, en vertu des relations (D) et (E), se réduit à :

$$(7) \qquad A' = Ap; \quad B' = Bq; \quad C' = Cr.$$

Soient OG l'axe du couple résultant, à l'époque t, et G le moment de ce couple, on aura :

$$(8) \quad \begin{cases} G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \\ \cos(G, x) = \dfrac{Ap}{G}; \quad \cos(G, y) = \dfrac{Bq}{G}; \quad \cos(G, z) = \dfrac{Cr}{G}. \end{cases}$$

On voit donc quel rôle important jouent les quantités p,

q, r relativement à l'expression de la force vive et à celle de la direction de l'axe du couple résultant.

44. Équations d'Euler. — Nous nous appuyons sur le théorème suivant démontré antérieurement :

La dérivée, par rapport au temps, de la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du corps, autour d'un axe fixe, est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à cet axe.

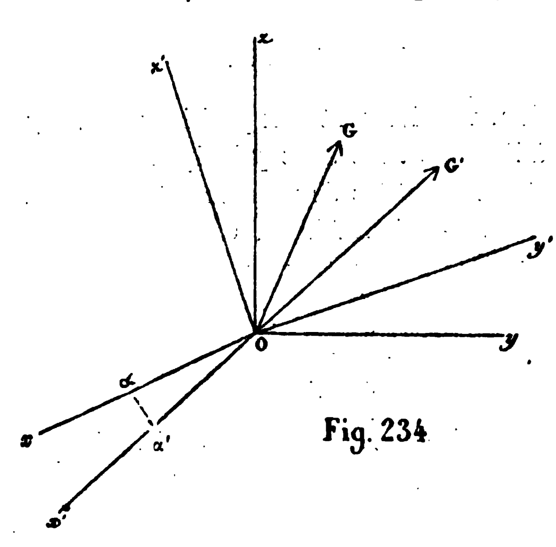


Fig. 234

Soient : Ox, Oy, Oz les positions des axes principaux d'inertie à l'époque t; Ox', Oy', Oz' les positions des axes principaux d'inertie à l'époque $t + dt$; OG et OG′ les axes correspondants des couples résultants.

Nous allons appliquer le théorème, relativement aux trois axes fixes Ox, Oy, Oz; les projections de OG sur ces axes ont pour expressions :

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr.$$

Les projections de OG′ sur les axes Ox', Oy', Oz' sont égales à :

$$A(p + dp), \quad B(q + dq), \quad C(r + dr).$$

Mais, il nous faut, par exemple, la projection de OG′ sur Ox;

cette projection est égale à :

$$A(p+dp)\cos(x',x)+B(q+dq)\cos(y',x)+C(r+dr)\cos(z',x).$$

Donc, l'accroissement, pendant le temps dt, de la somme des quantités de mouvement, par rapport à l'axe fixe Ox, sera :

$$\text{(F)}\quad A(p+dp)\cos(x',x)+B(q+dq)\cos(y',x) \\ +C(r+dr)\cos(z',x)-Ap.$$

On aura la dérivée qui figure dans notre théorème, en prenant la limite de la différence (F) divisée par dt. Pour y arriver, il faut obtenir les expressions des cosinus des angles $(x'x)$, $(y'x)$, $(z'x)$ ...

Prenons sur Ox une longueur $O\alpha=1$; au temps $t+dt$, le point α vient en α' sur Ox' ; soient x, y, z les coordonnées du point α par rapport à Ox, Oy, Oz; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point α' par rapport aux mêmes axes. On aura :

$$\cos(x_1'x)=x_1;\quad \cos(x_1'y)=y_1;\quad \cos(x_1'z)=z_1.$$

Les projections de la droite $\alpha\alpha'$ sur les axes Ox, Oy, Oz sont égales respectivement à $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, et en écrivant que la projection de $O\alpha'$ sur l'un quelconque des axes Ox, Oy, Oz est égale à la somme des projections de $O\alpha$ et de $\alpha\alpha'$, il viendra :

$$x_1=x+u\,dt;\quad y_1=y+v\,dt;\quad z_1=z+w\,dt.$$

Or, on a :

$$x=1;\quad y=0;\quad z=0,$$

et en remplaçant x, y, z par ces valeurs dans les équations (5), on trouve :

$$u=0;\quad v=r;\quad w=-q;$$

il viendra donc :

$$\cos(x_1' x) = x_1 = 1,$$
$$\cos(x_1' y) = y_1 = r\,dt,$$
$$\cos(x_1' z) = z_1 = -\,q\,dt.$$

Par des permutations de lettres, on trouvera les cosinus des angles que font les axes Oy' et Oz' avec Ox, Oy, Oz, et on formera le tableau suivant :

	Ox	Oy	Oz
Ox'	1	$r\,dt$	$-q\,dt$
Oy'	$-r\,dt$	1	$p\,dt$
Oz'	$q\,dt$	$-p\,dt$	1

On en déduira, pour l'expression (F) :

$$A(p + dp) - B(q + dq)\,r\,dt + C(r + dr)\,q\,dt - Ap,$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$A\,dp + (C - B)\,q\,r\,dt.$$

Divisant par dt, on aura, pour la dérivée de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe fixe Ox :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr.$$

Soient donc L, M, N les sommes des moments des forces extérieures qui agissent sur les divers points du corps, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, on aura les trois équations suivantes, dites équations d'Euler :

$$(9)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N. \end{cases}$$

En supposant les forces extérieures appliquées à tous les points du corps solide, désignons par $X_1\,dm$, $Y_1\,dm$, $Z_1\,dm$ les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz de la force extérieure appliquée à l'élément de masse dm du corps; on aura :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= \int (y Z_1 - z Y_1)\,dm,\\ M &= \int (z X_1 - x Z_1)\,dm,\\ N &= \int (x Y_1 - y X_1)\,dm,\end{aligned}\right.$$

où les intégrales s'étendent à toute la masse du corps; si l'on désigne du reste par $X_2\,dm$, $Y_2\,dm$, $Z_2\,dm$, les composantes, suivant les axes fixes OX, OY, OZ de la même force, on aura :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= aX_2 + a'Y_2 + a''Z_2,\\ Y_1 &= bX_2 + b'Y_2 + b''Z_2,\\ Z_1 &= cX_2 + c'Y_2 + c''Z_2.\end{aligned}\right.$$

En se rappelant les formules (2), on voit que L, M, N seront des fonctions de ψ, θ, φ; on aura donc en résumé, pour résoudre le problème, les équations suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr &= L,\\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= M,\\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq &= N,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} L &= F_1(\psi, \theta, \varphi),\\ M &= F_2(\psi, \theta, \varphi),\\ N &= F_3(\psi, \theta, \varphi),\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi - \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi,\\ q &= \sin\theta\,\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi + \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi,\\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, on est ramené à intégrer un système de six équations différentielles simultanées du premier ordre; il y aura six constantes arbitraires, les valeurs de ψ, θ et φ, à l'époque zéro, faisant connaître la position initiale du corps, et les valeurs initiales de p, q, r faisant connaître la rotation initiale.

On pourrait remplacer dans (9) p, q, r par leurs valeurs (3), et on serait ainsi ramené à un système de trois équations simultanées du second ordre, contenant les trois quantités inconnues ψ, θ, φ.

En général, il vaudra mieux garder les six équations (9) et (3).

Nous ferons toutefois ce calcul, dans un cas particulier, celui de $A = B$; alors les équations d'Euler se réduisent à :

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr &= L,\\ A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp &= M,\\ C\frac{dr}{dt} \qquad\qquad &= N. \end{aligned}\right.$$

Soit $NB = 90°$; nous introduirons, au lieu de L et M, les moments P et Q relatifs aux axes ON et OB; nous aurons :

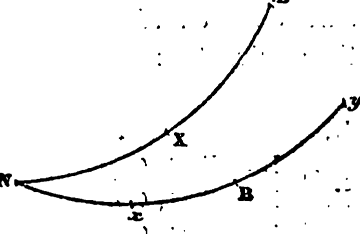


Fig. 235

$$(12)\ \left\{\begin{aligned} P &= L\cos\varphi - M\sin\varphi,\\ Q &= L\sin\varphi + M\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

Nous aurons donc, au lieu des équations (9), les combinaisons suivantes (13) :

$$(13)\ \left\{\begin{aligned} A\left(\cos\varphi\frac{dp}{dt} - \sin\varphi\frac{dq}{dt}\right) + (C - A)\,r\,(q\cos\varphi + p\sin\varphi) &= P,\\ A\left(\sin\varphi\frac{dp}{dt} + \cos\varphi\frac{dq}{dt}\right) + (C - A)\,r\,(q\sin\varphi - p\cos\varphi) &= Q,\\ C\frac{dr}{dt} &= N. \end{aligned}\right.$$

Or, on a :

$$\cos\varphi\frac{dp}{dt}-\sin\varphi\frac{dq}{dt}=\frac{-d.(q\sin\varphi-p\cos\varphi)}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}(p\sin\varphi+q\cos\varphi),$$

$$\sin\varphi\frac{dp}{dt}+\cos\varphi\frac{dq}{dt}=\frac{d.(p\sin\varphi+q\cos\varphi)}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}(q\sin\varphi-p\cos\varphi).$$

On pourra donc écrire les équations (13) comme il suit :

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&-A\frac{d}{dt}(q\sin\varphi-p\cos\varphi)\\&\qquad+(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\left\{A\frac{d\varphi}{dt}+(C-A)r\right\}=P,\\&+A\frac{d}{dt}(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\\&\qquad+(q\sin\varphi-p\cos\varphi)\left\{A\frac{d\varphi}{dt}+(C-A)r\right\}=Q,\\&\qquad\qquad C\frac{dr}{dt}=N.\end{aligned}\right.$$

Or, on tire de (3) :

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}q\sin\varphi-p\cos\varphi&=\frac{d\theta}{dt},\\p\sin\varphi+q\cos\varphi&=\sin\theta\frac{d\psi}{dt},\\r&=\frac{d\varphi}{dt}-\cos\theta\frac{d\psi}{dt},\end{aligned}\right.$$

en portant ces valeurs dans (14), on aura :

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&A\frac{d^2\theta}{dt^2}+(C-A)\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2-C\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}=-P,\\&A\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2}+(2A-C)\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}+C\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}=Q,\\&C\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\right)=N.\end{aligned}\right.$$

Ce sont là des équations dont on fait un usage très fréquent dans les applications (mouvement d'un corps pesant de

révolution autour d'un point de son axe, mouvement de la toupie, gyroscope, etc.).

45. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures. Solution analytique. — On a dans ce cas :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Les trois équations d'Euler donnent :

$$(1) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0. \end{cases}$$

Il convient de remarquer qu'on aurait encore ces trois mêmes équations si la résultante des forces extérieures passait constamment par le point fixe.

On en tire, en multipliant ces équations respectivement par p, q, r :

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où, en intégrant et désignant par $2T$ une constante arbitraire :

$$(2) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

D'après l'équation (6), le premier membre représente la force vive du corps.

Ainsi, l'intégrale (2) est celle qui répond au principe des forces vives; multiplions les équations (1) respectivement par Ap, Bq, Cr, ajoutons, nous trouverons :

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où, en intégrant et désignant la constante arbitraire par G^2 :

$$(3) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2.$$

G est le moment du couple résultant des quantités de mouvement, comme il résulte de la théorie développée plus haut; l'intégrale (3) exprime donc que le moment de ce couple est constant; nous savions déjà qu'il en était ainsi, et même que le plan de ce couple est invariable.

On peut rendre les formules plus symétriques par l'introduction de la variable $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$, qui représente le carré de la vitesse angulaire de la rotation instantanée. Nous aurons les équations (A) :

$$(A) \qquad \begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T, \\ p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2. \end{cases}$$

En résolvant ces équations, par rapport à p^2, q^2 et r^2, on trouve :

$$(B) \qquad \begin{cases} p^2(A-B)(A-C) = G^2 - 2T(B+C) + BC\,\omega^2, \\ q^2(B-C)(B-A) = G^2 - 2T(C+A) + CA\,\omega^2, \\ r^2(C-A)(C-B) = G^2 - 2T(A+B) + AB\,\omega^2. \end{cases}$$

Supposons que B soit le moment moyen et posons :

$$(C) \qquad \begin{cases} 2T(B+C) - G^2 = BC\lambda^2, \\ 2T(C+A) - G^2 = CA\mu^2, \\ 2T(A+B) - G^2 = AB\nu^2, \end{cases}$$

nous aurons :

$$(D) \qquad \begin{cases} p^2(A-B)(A-C) = BC(\omega^2 - \lambda^2), \\ q^2(B-C)(A-B) = AC(\mu^2 - \omega^2), \\ r^2(A-C)(B-C) = AB(\omega^2 - \nu^2). \end{cases}$$

Les différences A — B, A — C, B — C ont le même signe, on en conclut :

$$\omega^2 > \lambda^2, \quad \omega^2 > \nu^2, \quad \omega^2 < \mu^2.$$

Je dis que λ^2, μ^2, ν^2 sont positifs; on déduit en effet de l'expression (C) de λ^2, en y remplaçant 2T et G^2 par leurs valeurs (A) :

$$BC\lambda^2 = A(B + C - A)p^2 + BCq^2 + BCr^2;$$

le second membre de cette équation est positif puisque l'on a :

$$B + C - A = 2\Sigma mx^2 \text{ quantité positive.}$$

On verrait de même que les quantités μ^2 et ν^2 sont également positives.

On déduit encore de (C) les combinaisons suivantes :

$$ABC(\lambda^2 - \mu^2) = 2T(AC - BC) - G^2(A - B),$$

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} ABC(\lambda^2 - \mu^2) = (A - B)(2CT - G^2), \\ ABC(\mu^2 - \nu^2) = (B - C)(2AT - G^2), \\ ABC(\lambda^2 - \nu^2) = (A - C)(2BT - G^2). \end{cases}$$

Portons les valeurs (D) dans l'équation :

$$Ap\frac{dp}{dt} + (C - B)pqr = 0,$$

nous trouverons :

$$\frac{ABC}{(A - B)(A - C)}\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{(B - C)ABC}{(A - B)(A - C)(B - C)}\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \omega^2)(\omega^2 - \nu^2)},$$

d'où :

$$dt = \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \omega^2)(\omega^2 - \nu^2)}}.$$

ω^2 variera entre la plus grande des quantités λ^2, ν^2 et μ^2; l'expression de ω^2 en fonction de t dépend, comme on voit, des fonctions elliptiques.

(2) et (3) donneront p^2 et q^2 en fonction de r^2, et en portant ces valeurs dans l'une des équations (1), on aura r et par

suite p et q en fonction du temps; nous allons diriger le calcul de manière à introduire les fonctions elliptiques.

De (2) et (3), on conclut les relations suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 = G^2 - 2AT, \\ C(C-B)r^2 - A(B-A)p^2 = G^2 - 2BT, \\ A(C-A)p^2 + B(C-B)q^2 = 2CT - G^2. \end{cases}$$

Nous désignerons dans tous les cas par B le moment moyen; nous conviendrons de désigner par A le plus petit moment, si $G^2 - 2BT$ est positif, et le plus grand, si $G^2 - 2BT$ est négatif. En ayant égard à cette convention et se reportant à l'équation (4), on voit que les différences

$$C-A, \quad C-B, \quad B-A, \quad G^2-2AT, \quad G^2-2BT, \quad 2CT-G^2,$$

ont toutes le même signe. Posons pour abréger :

$$p'^2 = \frac{2CT-G^2}{A(C-A)}, \quad q'^2 = \frac{2CT-G^2}{B(C-B)},$$

la dernière des équations (4) pourra s'écrire :

$$\frac{p^2}{p'^2} + \frac{q^2}{q'^2} = 1.$$

On peut poser, en désignant par χ un angle auxiliaire :

$$(5) \quad \begin{cases} p = p' \cos\chi, \\ q = q' \sin\chi. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs de p et q dans la deuxième des relations (4), on trouve, après quelques réductions :

$$r^2 = \frac{G^2-2AT}{C(C-A)} \left\{ 1 - \frac{B-A}{C-B}\frac{2CT-G^2}{G^2-2AT}\sin^2\chi \right\},$$

nous poserons encore :

$$r'^2 = \frac{G^2-2AT}{C(C-A)}; \quad K^2 = \frac{B-A}{C-B} \cdot \frac{2CT-G^2}{G^2-2AT},$$

et nous aurons :

$$r^2 = r'^2 (1 - K^2 \sin^2 \chi).$$

La quantité K^2 est plus petite que 1 ; on a en effet :

$$(6) \qquad 1 - K^2 = \frac{G^2 - 2TB}{G^2 - 2AT} \cdot \frac{C - A}{C - B}.$$

On voit donc que r^2 sera toujours compris entre r'^2 et $r'^2 (1 - K^2)$.

Il résulte de là que r conservera toujours le même signe, et nous sommes libres de fixer ce signe en changeant au besoin le sens de l'axe Oz du moment C. Nous prendrons $r > 0$ si A est le plus petit moment, et $r < 0$ si A est le plus grand moment. Nous aurons :

$$(7) \qquad r = r' \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \chi},$$

le signe de r' sera fixé comme celui de r, et le radical sera toujours pris avec le signe $+$.

Si l'on porte les valeurs de p, q, r en fonction de x, dans la première des équations (1), on trouvera :

$$Ap' \frac{d\chi}{dt} = (C - B) q' r,$$

d'où :

$$(8) \qquad \frac{d\chi}{dt} = \frac{C - B}{A} \frac{q'}{p'} r ;$$

en résolvant par rapport à dt, et remplaçant r par sa valeur (7), il vient :

$$dt = \frac{A}{C - B} \frac{p'}{q' r'} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \chi}}.$$

Puisque $C - B$ et r sont de même signe, la formule (8) montre que χ croît sans cesse avec le temps ; si l'on fait $r_0 = r' \sqrt{1 - K^2}$, on aura :

$$\chi > \frac{C - B}{A} \cdot \frac{q'}{p'} r_0 t.$$

Donc $\chi = \infty$, pour $t = \infty$. On a :

$$\frac{C-B}{A} \cdot \frac{q'}{p'} = \frac{C-B}{A}\sqrt{\frac{2CT-G^2}{2CT-G^2}}\sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}}.$$

Posons :

$$\nu = \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}},$$

et nous aurons :

$$\nu r' dt = \frac{d\chi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\chi}}, \qquad (9)$$

d'où, en employant les notations de Jacobi, et désignant par f une constante arbitraire :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi &= am(\nu r' t + f); \\ p &= p' \cos am(\nu r t' + f); \\ q &= q' \sin am(\nu r' t + f); \\ r &= r' \Delta am(\nu r' t + f). \end{aligned} \right.$$

Voilà donc p, q, r exprimés en fonction du temps, à l'aide des fonctions elliptiques; il y a trois constantes arbitraires, T, G, f. Ces valeurs de p, q, r sont des fonctions périodiques du temps; la durée de la période est :

$$\tau = \frac{1}{\nu r'}\int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\chi}}.$$

Cette durée devient infinie pour $K = 1$, ou bien, en se reportant à (6) pour $G^2 - 2TB = 0$; mais c'est là un cas particulier que nous examinerons plus loin. Il nous reste à trouver φ, θ et ψ en fonction du temps.

L'axe du couple résultant des quantités de mouvement, conservant une direction fixe dans l'espace, nous le prendrons pour axe OZ. Nous aurons alors :

$$Ap = G\cos(Z,x); \quad Bq = G\cos(Z,y); \quad Cr = G\cos(Z,z),$$

ou bien :

$$Ap = Ga'; \qquad Bq = Gb'; \qquad Cr = Gc',$$

et en remplaçant a', b', c' par leurs valeurs, il vient :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi\sin\theta &= -\frac{Ap}{G},\\ \cos\varphi\sin\theta &= \frac{-Bq}{G},\\ \cos\theta &= \frac{+Cr}{G}.\end{aligned}\right.$$

On aura ainsi φ et θ en fonction du temps. On a ensuite :

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi,$$

d'où, en tenant compte de (11) :

$$\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = -\frac{Ap^2 + Bq^2}{G},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -G\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - G^2\cos^2\theta},$$

ou, en ayant égard à la dernière des formules (11) :

$$\frac{d\psi}{dt} = -G\frac{Ap^2 + Bq^2}{G^2 - C^2r^2}.$$

Or, on a :

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2;$$

donc :

$$(12)\quad \frac{d\psi}{dt} = -G\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}.$$

En remplaçant p et q par leurs valeurs (10), on aura $\frac{d\psi}{dt}$, et par suite ψ en fonction de t; donc le problème sera entièrement résolu.

46. Cas de A = B. Méthode particulière d'intégration. — Cette hypothèse se trouvera réalisée si le corps est homogène et de révolution autour de Oz.

Les équations d'Euler deviennent :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = 0,$$

$$A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,pr = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} = 0.$$

On déduit de ces équations, en désignant par n une constante arbitraire :

$$r = n,$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{A - C}{A}\,nq, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{(A - C)}{A}\,np. \end{aligned}\right.$$

En différentiant la première de ces équations, et tenant compte de la seconde, il vient :

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\left(\frac{A - C}{A}\,n\right)^2 p;$$

en posant :

$$\frac{A - C}{A} = \mu,$$

cette dernière équation devient :

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\mu^2 n^2 p,$$

dont l'intégrale est :

$$p = m \sin(\mu n t + \varepsilon),$$

m et ε étant des constantes arbitraires. On aura ensuite :

$$n\mu q = \frac{dp}{dt} = m\mu\nu \cos(\mu n t + \varepsilon).$$

On trouvera donc pour p, q, r les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} p = m \sin(\mu n t + \varepsilon), \\ q = m \cos(\mu n t + \varepsilon), \\ r = n, \end{array}\right.$$

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = m^2 + n^2 = \text{const.}$$

On a en général, en prenant pour axe OZ l'axe du couple résultant :

$$\sin\varphi \sin\theta = -\frac{Ap}{G}; \quad \cos\varphi \sin\theta = \frac{-Aq}{G}; \quad \cos\theta = \frac{Cr}{G}.$$

On en déduit :

$$\cos\theta = \frac{Cn}{G}; \quad \theta = \text{const.}$$

Le plan de l'équateur se meut donc en gardant une inclinaison constante sur le plan XOY, c'est à dire sur le plan du couple résultant; la vitesse angulaire de ce mouvement est $\mu\nu$; elle est différente de $\omega = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Pour calculer ψ en fonction du temps, remarquons que l'on a :

$$\frac{d\psi}{dt} = -G\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2p^2} = \frac{-GA(p^2 + q^2)}{A^2(p^2 + q^2)} = -\frac{G}{A}.$$

On en déduit, en désignant par ψ_0 une constante arbitraire :

$$\psi = \psi_0 - \frac{G}{A}t.$$

Donc, la trace de l'équateur sur le plan du couple résultant se meut uniformément, et par conséquent l'axe de révolution décrit d'un mouvement uniforme une surface conique ayant pour axe de révolution l'axe du couple résultant.

Théorie géométrique de Poinsot, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures.

47. L'application du théorème des aires montre que :

1° L'axe du couple résultant des quantités de mouvement

conserve dans l'espace une grandeur et une direction fixes; les projections de l'axe de ce couple sur les positions, à l'époque t, des axes principaux d'inertie relatifs au point fixe O, étant égales respectivement à Ap, Bq, Cr, on en conclut, en désignant par G le moment constant du couple résultant :

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2.$$

2° L'application du principe des forces vives nous apprend que : la force vive du système reste invariable dans le mouvement; car les forces extérieures sont nulles, et la somme des travaux des forces intérieures est égale à zéro, parce que les distances mutuelles des divers points du corps solide sont invariables; on aura donc, en désignant par T une constante :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

Cherchons le point P où l'ellipsoïde central relatif au point fixe est rencontré par l'axe instantané OP de l'époque t; soient ξ, η, ζ les coordonnées courantes, relativement aux axes principaux d'inertie; l'ellipsoïde a pour équation :

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

et les équations de l'axe OP sont :

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point P que nous appellerons le pôle instantané, ou encore le pôle de la rotation, $\rho_1 = OP$ sa distance au centre de l'ellipsoïde, ω la vitesse angulaire de la rotation; on aura :

$$\frac{\xi_1}{p} = \frac{\eta_1}{q} = \frac{\zeta_1}{r} = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{\rho_1}{\omega},$$

d'où :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\rho_1}{\omega} p, \\ \eta_1 = \frac{\rho_1}{\omega} q, \\ \zeta_1 = \frac{\rho_1}{\omega} r, \end{cases}$$

avec la relation :

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 + C\zeta_1^2 = 1,$$

d'où :

$$\frac{\rho_1^2}{\omega^2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 1;$$

mais on a déjà :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T,$$

il résulte donc des deux équations précédentes :

$$\rho_1 \sqrt{2T} = \omega.$$

Donc :

3° *La vitesse angulaire de la rotation est proportionnelle à la longueur du rayon vecteur mené du centre de l'ellipsoïde au pôle instantané.*

Le plan tangent au point P à l'ellipsoïde principal a pour équation :

$$A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1 = 1;$$

ou bien, en remplaçant ξ_1, η_1, ζ_1 par leurs valeurs :

$$\frac{\rho_1}{\omega}(Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta) = 1,$$

ou encore :

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2T}.$$

On voit que ce plan est parallèle au plan du couple résultant; car les cosinus que fait avec les axes la normale à ce dernier plan sont proportionnels à Ap, Bq, Cr; donc :

4° *Le plan qui touche l'ellipsoïde au pôle instantané est parallèle au plan du couple résultant.*

Ou bien :

L'axe instantané est le diamètre conjugué du plan du couple résultant, par rapport à l'ellipsoïde central.

On voit que le plan tangent dont on vient de parler conserve une direction fixe, puisqu'il est parallèle au plan du couple résultant, et que ce dernier a une direction invariable.

Cherchons la distance du point fixe à ce plan tangent; cette distance sera :

$$\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\sqrt{2T}}{G} = \text{const.}$$

Donc :

5° *Le plan qui touche l'ellipsoïde au pôle instantané reste toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde.*

Ainsi, le centre de l'ellipsoïde est fixe, le plan tangent au pôle de rotation garde une direction invariable, et reste toujours à la même distance du centre ; donc :

6° *Le plan parallèle au plan invariable, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central, au pôle instantané de la rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu.*

On se représentera donc le mouvement du corps en concevant :

1° Que l'ellipsoïde central, dont le centre est maintenu fixe, reste en contact avec un même plan fixe;

2° Qu'il tourne à chaque instant autour du rayon vecteur qui va du centre au point de contact;

3° Qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

Tel est le théorème de Poinsot.

Cherchons l'angle i de l'axe instantané et de l'axe du

couple résultant; on aura :

$$\cos i = \frac{Ap}{G}\frac{p}{\omega} + \frac{Bq}{G}\frac{q}{\omega} + \frac{Cr}{G}\frac{r}{\omega} = \frac{2T}{G\omega},$$

d'où :

$$\omega \cos i = \frac{2T}{G} = \text{const.}$$

Donc, *la vitesse angulaire instantanée donne une composante constante par rapport à l'axe du couple résultant.*

48. Développement de la solution. — La suite des points par lesquels l'ellipsoïde central vient se mettre en contact avec le plan fixe, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps, et les mêmes points étant considérés dans le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. Soit U la première de ces courbes, que Poinsot a nommée la poloïde, U_1 la seconde, ou l'herpoloïde. Le lieu des axes instantanés dans le corps est un cône S, ayant pour sommet le point O et pour directrice la courbe U; le lieu des axes instantanés dans l'espace est un cône S_1 ayant pour sommet le point O et pour directrice la courbe U_1; on peut se représenter le mouvement en faisant rouler le cône S sur le cône fixe S_1.

49. Équations de la poloïde. — La poloïde est le lieu des points de l'ellipsoïde central pour lesquels le plan tangent est à une distance constante du point fixe O, cette distance étant égale à $\sqrt{\frac{2T}{G}}$.

L'équation de l'ellipsoïde central est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1; \quad A < B < C,$$

x', y', z' désignant les coordonnées d'un point quelconque de la poloïde; la distance à l'origine du plan tangent en ce

point est :

$$\frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}};$$

on aura donc :

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} = \frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}},$$

et on a en outre la relation :

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1.$$

On conclut des deux équations précédentes :

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} = \frac{\sqrt{Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2}}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}},$$

ou, en élevant au carré, réduisant et supprimant les accents :

(1) $A(G^2 - 2AT)x^2 + B(G^2 - 2BT)y^2 + C(G^2 - 2CT)z^2 = 0,$

avec la relation :

(2) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Les équations (1) et (2) sont les équations de la poloïde; (1) est l'équation du cône S. On voit que la poloïde est une courbe algébrique.

La distance $\sqrt{\frac{2T}{G}}$ est comprise entre le grand axe $\frac{1}{\sqrt{A}}$ et le plus petit $\frac{1}{\sqrt{C}}$; on a donc :

$$\frac{\sqrt{2T}}{G} < \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad \frac{\sqrt{2T}}{G} > \frac{1}{\sqrt{C}},$$

d'où :

(3) $$G^2 - 2AT > 0; \quad G^2 - 2CT < 0.$$

En éliminant successivement x^2, y^2, z^2 entre les équations (1) et (2), on aura les équations des projections de la

poloïde sur les plans coordonnés; on trouve ainsi pour l'équation de la projection sur le plan xOy :

$$A(C-A)x^2 + B(C-B)y^2 = \frac{2CT - G^2}{2T},$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

La projection sur le plan yOz, a pour équation :

$$B(B-A)y^2 + C(C-A)z^2 = \frac{G^2 - 2AT}{2T}.$$

C'est encore une ellipse.

La projection sur le plan zOx a pour équation :

$$(4) \qquad -C(C-B)z^2 + A(B-A)x^2 = \frac{2BT - G^2}{2T}.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites :

$$(5) \qquad \frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{A(B-A)}{C(C-B)}}.$$

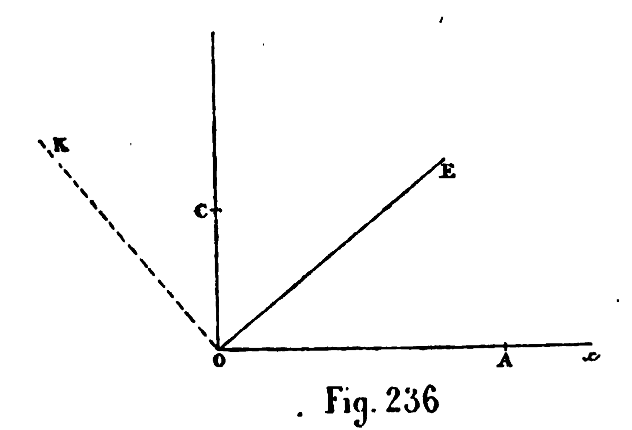


Fig. 236

Soient OE et OK les deux asymptotes.

Si $2BT - G^2 > 0$, l'hyperbole est située dans l'angle EOA.

Si $2BT - G^2 < 0$, l'hyperbole est située dans l'angle EOC.

Dans le premier cas, la poloïde entoure le sommet A; dans le second, elle est tracée autour du sommet C.

Les deux espèces de poloïde sont séparées par les deux ellipses suivant lesquelles les plans (5) coupent l'ellipsoïde. L'équation (4) montre que ces deux ellipses égales sont le lieu des points de l'ellipsoïde pour lesquels le plan tangent est à une distance du centre égale à l'axe moyen.

Ainsi, si $\frac{G^2}{2T} = A$, la poloïde se réduit au seul point A; si le corps a commencé à tourner autour de OA, il continuera donc à tourner indéfiniment autour de OA.

Si $\frac{G^2}{2T} > A$ augmente, on a une petite poloïde entourant le point A.

Si $\frac{G^2}{2T} = B$, la poloïde se compose de deux ellipses égales BE, BF; si le corps a commencé à tourner autour de OB, il n'y a aucune raison pour que le point B se meuve sur l'ellipse BE plutôt que sur BF; le corps continuera donc à tourner autour de OB.

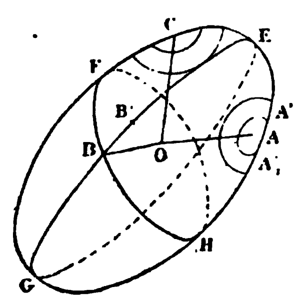


Fig. 237

Si $\frac{G^2}{2T} > B$, la poloïde passe dans le fuseau EBF, et entoure le point C; elle finit par être une petite courbe autour de C, et le point C lui-même pour $\frac{G^2}{2T} = C$.

Le corps ayant commencé à tourner autour de OC, tournera donc indéfiniment autour de cette même droite.

50. Stabilité des axes principaux. — Si l'axe a été écarté un peu de OA en OA', le point A' se mouvra sur la poloïde

$A'A'_1$ qui passe en A', l'axe ne fera que de petites oscillations autour de OA; il y a stabilité.

De même pour OC.

Il n'en est pas de même pour OB; l'axe étant un peu dérangé, ira décrire une courbe étendue, soit autour de OA, soit autour de OC. Si cependant il est écarté en B' et que les conditions initiales tendent à le ramener en B, il finira par revenir en B.

Mouvement d'un corps solide homogène pesant, de révolution, fixé par un point de son axe de figure.

51. Ce problème a été traité pour la première fois par Lagrange, puis par Poisson, qui ne paraît pas avoir eu connaissance de la solution de Lagrange.

Soient O le point fixe, OX, OY, OZ trois axes rectan-

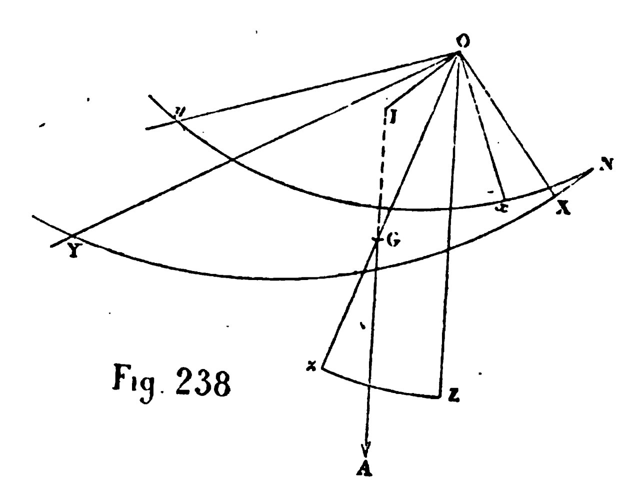


Fig. 238

gulaires fixes, OZ étant vertical et dirigé vers le bas. Soient, à l'époque t, Oz la position de l'axe de figure du corps, Ox et Oy celles de deux axes perpendiculaires à Oz liés au corps; le centre de gravité G est sur Oz, nous ferons $OG = h$, et nous désignerons par μ la masse du corps.

Traçons une sphère de rayon 1, ayant pour centre le point O. Cette sphère coupera les plans xOy, XOY, ZOz, suivant les arcs de cercle Nxy, NXY, Zz. Posons :

$$\mathrm{NX} = \psi, \quad \mathrm{N}x = \varphi, \quad \mathrm{Z}z = \theta;$$

p, q, r ayant la signification ordinaire, nous aurons :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} p \sin \varphi + q \cos \varphi &= \sin \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ q \sin \varphi - p \cos \varphi &= \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos \theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Le poids GA du corps étant parallèle à OZ, ses composantes par rapport aux axes Ox, Oy seront :

$$\mathrm{X}_1 = \mu g \cos(\mathrm{Z}, x) = \mu g a', \quad \text{suivant } Ox,$$
$$\mathrm{Y}_1 = \mu g \cos(\mathrm{Z}, y) = \mu g b', \quad \text{suivant } Oy.$$

Soient L, M, N les moments de ce poids relativement aux trois axes Ox, Oy, Oz, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point G; on aura :

$$\mathrm{L} = y_1 \mathrm{Z}_1 - z_1 \mathrm{Y}_1; \quad \mathrm{M} = z_1 \mathrm{X}_1 - x_1 \mathrm{Z}_1; \quad \mathrm{N} = x_1 \mathrm{Y}_1 - y_1 \mathrm{X}_1;$$

ou, à cause de :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = h,$$
$$\mathrm{L} = -h\mathrm{Y}_1; \quad \mathrm{M} = +h\mathrm{X}_1; \quad \mathrm{N} = 0;$$

ou, en remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs ci-dessus :

$$\mathrm{L} = -h\mu g b'; \quad \mathrm{M} = h\mu g a'; \quad \mathrm{N} = 0.$$

Les triangles sphériques $\mathrm{ZN}x$, $\mathrm{ZN}y$ donnent du reste :

$$a' = -\sin \varphi \sin \theta; \quad b' = -\cos \varphi \sin \theta; \quad c' = \cos \theta,$$

on aura donc :

$$\mathrm{L} = \mu g h \cos \varphi \sin \theta; \quad \mathrm{M} = -\mu g h \sin \varphi \sin \theta; \quad \mathrm{N} = 0,$$

et les équations d'Euler deviendront, en remarquant que l'on a $B = A$, parce que le corps est homogène et de révolution autour de Oz :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr &= \mu g h \cos\varphi \sin\theta, \\ A\frac{dq}{dt} - (C - A)\,pr &= -\mu g h \sin\varphi \sin\theta, \\ C\frac{dr}{dt} \qquad\qquad &= 0. \end{aligned} \right.$$

On est ramené à intégrer les six équations (1) et (2); mais, dans le cas actuel, on peut suivre une méthode plus simple.

La dernière équation (2) donne d'abord, en désignant par n une constante :

$$r = n.$$

Le travail de la force GA est $\mu g\,(Z - Z_0)$, en désignant par Z la coordonnée du point G rapportée à l'axe OZ; on a :

$$Z = h \cos\theta.$$

Le théorème des forces vives donne donc :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2\mu g h \cos\theta + \text{const.};$$

ou bien, à cause de $A = B$ et $r = \text{const.}$:

$$(3) \qquad A\,(p^2 + q^2) = 2\mu g h \cos\theta + \alpha,$$

α désignant une constante arbitraire.

Le moment de la force GA par rapport à OZ étant nul, on en conclut que pendant tout le mouvement, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe OZ est constante; or, cette somme a aussi pour expression :

$$Apa' + Bqb' + Crc';$$

car c'est la projection sur OZ de l'axe du couple résul-

tant, et les projections de cet axe sur Ox, Oy, Oz sont Ap, Bq, Cr, et les axes Ox, Oy, Oz forment avec OZ des angles dont les cosinus sont a', b', c'. On aura donc, en remplaçant a', b', c' et r par leurs valeurs, et désignant par β une nouvelle constante arbitraire :

$$(4) \qquad A \sin\theta\,(p \sin\varphi + q\cos\varphi) = Cn\cos\theta + \beta.$$

Si, dans (3) et (4), on remplace p et q par leurs valeurs (1), on trouvera :

$$(5) \qquad A \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + A\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\mu g h\cos\theta + \alpha,$$

$$(6) \qquad A\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = Cn\cos\theta + \beta.$$

Ces équations feront connaître ψ et θ en fonction de t; elles donneront donc le mouvement de l'équateur du corps. On en tire :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn\cos\theta + \beta}{A\sin^2\theta},$$

$$\frac{1}{A\sin^2\theta}(Cn\cos\theta + \beta)^2 + A\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\mu g h\cos\theta + \alpha.$$

Posons $\cos\theta = u$; on trouvera :

$$(7) \qquad A^2\frac{du^2}{dt^2} = A(1-u^2)(2\mu g h u + \alpha) - (Cnu + \beta)^2,$$

$$(8) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{Cnu + \beta}{A(1-u^2)};$$

on tire ensuite de la dernière des équations (1), en y remplaçant r par n, $\cos\theta$ par u, et $\frac{d\psi}{dt}$ par sa valeur (8) :

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = n + u\frac{Cnu + \beta}{A(1-u^2)}.$$

L'équation (7) d'où l'on déduit :

$$(10)\qquad dt = \pm \frac{A\,du}{\sqrt{A(1-u^2)(2\mu g h u + \alpha) - (Cnu + \beta)^2}},$$

fera connaître u en fonction de t; (8) et (9) donneront ensuite ψ et φ en fonction de u. On est conduit à des intégrales elliptiques.

52. Discussion. — Soit posé :

$$(11)\qquad f(u) = A(1-u^2)(2\mu g h u + \alpha) - (Cnu + \beta)^2.$$

On aura :

$$(12)\qquad A\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{f(u)}.$$

Soit u_0 la valeur initiale de u; remarquons que d'après (12) on doit avoir $f(u_0) > 0$, ce qui est aisé à vérifier, car on trouve par des calculs faciles :

$$f(u_0) = A^2 \sin^2\theta_0 \left\{ (p_0^2 + q_0^2) - (p_0 \sin\varphi_0 - q_0 \cos\varphi_0)^2 \right\}$$
$$= A^2 \sin^2\theta_0 \left\{ p_0 \cos\varphi_0 + q_0 \sin\varphi_0 \right\}^2 > 0.$$

On trouvera en donnant, dans l'expression (11), à u les valeurs $-\infty$, -1, u_0, $+1$:

$$f(-\infty) > 0,$$
$$f(-1) < 0,$$
$$f(u_0) > 0,$$
$$f(+1) < 0.$$

Donc, l'équation $f(u) = 0$, qui est du 3e degré, a ses trois racines réelles et comprises, l'une entre $-\infty$ et -1, la suivante entre -1 et u_0, la dernière entre u_0 et $+1$; soient $-u_1$, u' et u'' ces racines, $u' < u''$. On pourra écrire :

$$f(u) = 2\mu g A (u - u')(u'' - u)(u + u_1),$$

$$(13)\qquad \sqrt{\frac{2\mu g}{A}}\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{(u-u')(u''-u)(u+u_1)}};$$

u étant compris, par sa nature, entre -1 et $+1$, on voit que le produit $(u - u')(u'' - u)$ devra toujours être positif; donc u oscillera entre u' et u''.

On déterminera les constantes α et β, d'après les conditions initiales, par les formules (3) et (4); on pourra supposer que la valeur initiale de φ est zéro, c'est-à-dire que l'on aura pris pour axe Ox lié au corps, la position initiale de ON; on aura ainsi :

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha = A(p_0^2 + q_0^2) - 2\mu g h \cos\theta_0, \\ \beta = A q_0 \sin\theta_0 - Cn\cos\theta_0. \end{cases}$$

Examen du cas où $p_0 = 0$, $q_0 = 0$. — Le corps est alors animé d'une rotation initiale autour de son axe de figure, et abandonné à lui-même. Les formules (14) ou plus simplement les formules (5) et (6) donnent :

$$\begin{aligned} \alpha &= -2\mu g h \cos\theta_0 = -2\mu g h\, u_0, \\ \beta &= -Cn\cos\theta_0 = -Cn\, u_0. \end{aligned}$$

On trouve :

$$(15)\qquad f(u) = (u - u_0)\left\{ 2A\,\mu g h(1 - u^2) - C^2n^2(u - u_0) \right\}.$$

Ici, on a :

$$u' = u_0; \qquad u'' > u' > u_0,$$

$$(16)\qquad \sqrt{\frac{2\mu g}{A}}\,dt = \pm\frac{du}{\sqrt{(u - u_0)(u'' - u)(u + u_1)}}.$$

On a, pendant tout le mouvement :

$$u_0 < u < u''.$$

On commencera à prendre le signe $+$ dans la formule (16) quand u augmentera de u_0 à u'', puis le signe $-$ quand u diminuera de u'' à u_0, etc. La formule (8), qui devient, dans le cas actuel :

$$(17)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(u - u_0)}{A(1 - u^2)},$$

montre que si n est positif, $\frac{d\psi}{dt}$ est positif et ψ croît sans cesse; le mouvement de précession est rétrograde; il serait direct, si n était négatif. (Remarquons que n est la vitesse angulaire de rotation initiale autour de OG.)

La formule (17) donne, en y remplaçant dt par sa valeur (16) :

$$(18) \qquad d\psi = \frac{Cn}{\sqrt{2\mu g}\,A}\sqrt{\frac{u-u_0}{(u'-u)(u+u_1)}}\cdot\frac{du}{1-u^2}.$$

Le point z décrit une certaine courbe sphérique; cherchons l'équation de la projection de cette courbe sur le plan horizontal XOY; soit P la projection du point z, X et Y les coordonnées de ce point P; on aura :

$$X = OP\cos POX; \qquad Y = OP\sin POX,$$

$$OP = \sin\theta = \sqrt{1-u^2}.$$

La droite ON, perpendiculaire sur OZ et Oz, est perpendiculaire sur le plan ZOz, donc sur la droite OP; ainsi $PON = 90^\circ$; donc $POX = 90 - \psi$ et :

$$(19) \qquad X = \sqrt{1-u^2}\sin\psi; \qquad Y = \sqrt{1-u^2}\cos\psi.$$

u est déterminé en fonction de ψ par l'équation (18); les deux équations (19) donneront donc, en fonction de ψ, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe cherchée.

Le rayon vecteur $OP = \sqrt{1-u^2}$ est toujours compris entre $\sqrt{1-u'^2}$ et $\sqrt{1-u_0^2}$.

Soit V l'angle que fait la tangente à cette courbe avec le rayon vecteur OP; on a :

$$\operatorname{tg} V = \pm\frac{\sqrt{1-u^2}}{\frac{d.\sqrt{1-u^2}}{d\psi}} = \mp\frac{1-u^2}{u}\frac{d\psi}{du},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{d\psi}{du}$ par sa valeur (18) :

$$(20) \qquad \operatorname{tg} V = \mp \frac{Cn}{u\sqrt{2\mu g A}} \sqrt{\frac{u - u_0}{(u' - u)(u + u_1)}},$$

pour $u = u_0$, on a $V = 0$; pour $u = u'$, $V = \frac{\pi}{2}$.

La courbe rencontre donc normalement la circonférence

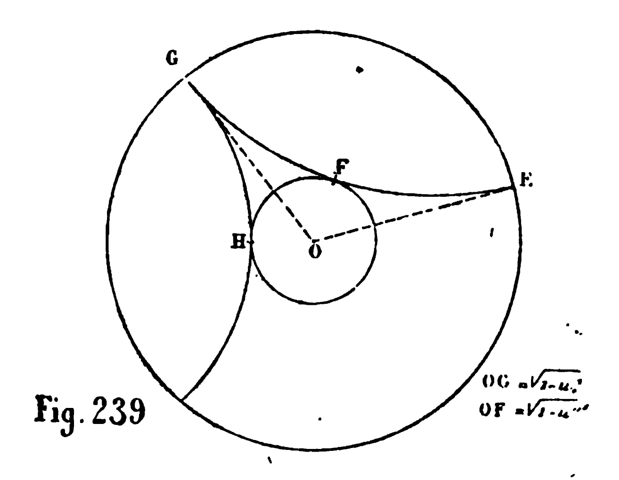


Fig. 239

extérieure, tandis qu'elle est tangente à la circonférence intérieure.

Si nous partons du point E, où $u = u_0$, le rayon vecteur diminue jusqu'en F; il augmente de F en G; à partir de G, il doit diminuer, tout en continuant à tourner dans le même sens; le point G est donc un point de rebroussement.

Du cas où la vitesse de rotation n est très grande. — En se reportant à l'équation (15), on voit que u' est l'une des racines de l'équation :

$$2A\,\mu g h\,(1 - u^2) - C^2 n^2 (u - u_0) = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$u - u_0 = \frac{2A\,\mu g h}{C^2 n^2}(1 - u^2).$$

Le coefficient $\frac{2A\,\mu g h}{C^2 n^2}$ étant très petit, la quantité u_1 est très grande, et u' diffère peu de u_0; u qui doit toujours être compris entre u_0 et u', différera très peu de u_0, et θ de θ_0; l'angle que fait l'axe du corps solide avec la verticale, sera sensiblement constant.

On peut, dans ce cas, effectuer les intégrations par approximation. Nous partirons des formules ci-dessous, dans lesquelles on a remis θ au lieu de u :

$$dt = \pm \frac{A \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\sqrt{2\mu g h A \sin^2\theta - C^2 n^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}},$$

(21) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(\cos\theta - \cos\theta_0)}{A \sin^2\theta}.$$

Nous poserons :

(22) $$\frac{\mu g h A}{C^2 n^2} = k.$$

k sera une petite quantité, puisque n est très grand. Nous aurons :

(23) $$dt = \pm \frac{A}{Cn} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}\,\sqrt{2k \sin^2\theta - (\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

Nous savons que θ diffère très peu de θ_0, pendant toute la durée du mouvement; nous ferons donc :

$$\theta = \theta_0 - w,$$

et w sera très petit.

Nous aurons, en appliquant la formule de Taylor :

$$\cos\theta = \cos(\theta_0 - w) = \cos\theta_0 + w \sin\theta_0, \quad \text{en négligeant } w^2,$$
$$2k \sin^2\theta = 2k \sin^2\theta_0, \quad \text{en négligeant } wk,$$
$$-\sin\theta\, d\theta = d.\cos\theta = \sin\theta_0\, dw,$$

et la formule (23) deviendra, en y prenant le signe —, aux environs de $t = 0$, puisque θ commence à décroître :

$$dt = \frac{A}{Cn} \frac{dw}{\sqrt{w}\sqrt{2k \sin \theta_0 - w}} = \frac{A}{Cn} \frac{dw}{\sqrt{k^2 \sin^2 \theta_0 - (k \sin \theta_0 - w)^2}},$$

ou bien :

$$\frac{Cn}{A} dt = \frac{-d\,\dfrac{k \sin \theta_0 - w}{k \sin \theta_0}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{k \sin \theta_0 - w}{k \sin \theta_0}\right)^2}},$$

d'où, en intégrant :

$$\frac{Cnt}{A} = \arc\cos \frac{k \sin \theta_0 - w}{k \sin \theta_0} + \text{const.}$$

On doit avoir, pour $t = 0$, $\theta = 0$, $w = 0$; la constante est nulle; on a ensuite :

$$\frac{k \sin \theta_0 - w}{k \sin \theta_0} = \cos \frac{Cnt}{A},$$

d'où :

(24) $$w = 2k \sin \theta_0 \sin^2 \frac{Cnt}{2A},$$

$$\theta = \theta_0 - 2k \sin \theta_0 \sin^2 \frac{Cnt}{2A},$$

(25) $$\theta = \theta_0 - \frac{2A\, \mu g h \sin \theta_0}{C^2 n^2} \sin^2 \frac{Cn}{2A} t = \theta_0 + \Theta,$$

en posant :

$$\Theta = - \frac{2A\, \mu g h \sin \theta_0}{C^2 n^2} \sin^2 \frac{Cn}{2A} t.$$

La formule (21) donne ensuite :

(26) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{A} \cdot \frac{w \sin \theta_0}{\sin^2 \theta}.$$

On peut remplacer $\sin^2 \theta$ par $\sin^2 \theta_0$, car cela revient à négliger w^2 dans le second membre, ce qui a déjà été fait;

remplaçant en outre w par sa valeur (24), il viendra :

$$\frac{d\psi}{dt} = 2k\frac{Cn}{A}\sin^2\frac{Cn}{2A}t = k\frac{Cn}{A} - \frac{kCn}{A}\cos\frac{Cn}{A}t,$$

d'où :

$$\psi = \frac{C}{A}knt - k\sin\frac{Cn}{A}t,$$

$$(27) \qquad \psi = \frac{\mu gh}{Cn}t - \frac{\mu gh\,A}{C^2n^2}\sin\frac{C}{A}nt = \frac{\mu gh}{Cn}t - \Psi,$$

en posant :

$$\Psi = \frac{\mu gh\,A}{C^2n^2}\sin\frac{C}{A}nt;$$

il n'y a pas de constante à ajouter, car on a bien $\psi = 0$ pour $t = 0$.

Enfin, la formule

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}$$

va nous donner, en y remplaçant $\frac{d\psi}{dt}$ par sa valeur (26) :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \frac{Cn\sin\theta_0}{A}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}w.$$

On doit remplacer dans le second membre $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ par $\frac{\cos\theta_0}{\sin^2\theta_0}$; en mettant en outre pour w sa valeur (24), il viendra :

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + 2k\frac{Cn}{A}\cos\theta_0\sin^2\frac{C}{A}nt = n + \frac{kCn}{A}\cos\theta_0 - \frac{kCn}{A}\cos\theta_0\cos\frac{C}{A}nt,$$

d'où, et sans ajouter de constante, en prenant $\varphi = 0$, pour $t = 0$:

$$\varphi = nt\left(1 + k\frac{C}{A}\cos\theta_0\right) - k\cos\theta_0\sin\frac{C}{A}nt,$$

$$(28) \qquad \varphi = nt\left\{1 + \frac{\mu gh}{Cn^2}\cos\theta_0\right\} - \frac{\mu gh\,A}{C^2n^2}\cos\theta_0\sin\frac{C}{A}nt.$$

Les formules (25), (27) et (28) résolvent le problème, au degré d'approximation indiqué.

Négligeons d'abord Θ et Ψ; nous verrons que, quand le mobile a reçu une très grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, après que cette droite a été écartée de la position verticale, son équateur conserve une inclinaison constante sur le plan horizontal XOY pendant toute la durée du mouvement; l'expression (27) de ψ montre qu'en même temps l'intersection ON de ces deux plans prend un mouvement uniforme, très lent par rapport à la rotation du mobile (en effet $\frac{\mu g h}{Cn} t$ est très petit devant nt) et qui est rétrograde dans le cas où nous nous sommes placés, $n > 0$; la valeur de ψ est indépendante de θ_0.

Le mouvement réel différera du mouvement simple ci-dessus, par les petites quantités Θ et Ψ qui constituent ce que l'on appelle la *nutation,* tandis que le mouvement simple considéré est un mouvement de précession; en se reportant aux expressions de Θ et de Ψ, on voit que ces quantités sont d'autant plus petites que le mouvement de rotation initial est plus rapide; Θ et Ψ sont du reste des quantités périodiques, et la durée T de la période est déterminée par l'équation :

$$T \cdot \frac{C}{A} n = 2\pi,$$

d'où :

$$T = \frac{C}{A} \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Cette durée est très petite.

53. Expérience de Foucault et de M. Gruey. — Les conditions que nous venons d'indiquer ont été réalisées dans l'un des appareils de Foucault; AB est un tore, auquel on peut communiquer un mouvement de rotation rapide autour de son axe CD. L'extrémité C repose sur une

crapaudine située à l'extrémité du support vertical CE; on tient d'abord à la main l'extrémité D; quand on abandonne l'appareil à lui-même, après avoir imprimé au tore un mouvement de rotation, on voit que l'axe CD ne tombe pas; mais il se met à décrire un plan horizontal, d'un mouvement qui paraît uniforme.

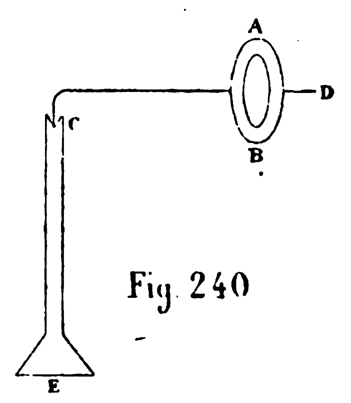


Fig. 240

Ici, le plan de l'équateur du tore est à l'origine du mouvement perpendiculaire sur le plan horizontal qui passe par le point fixe; $\theta_0 = 90^\circ$, θ restera toujours voisin de θ_0; donc l'axe CD doit bien rester constamment à très peu près horizontal; la ligne d'intersection du plan horizontal XOY avec le plan de l'équateur doit prendre un mouvement de rotation à peu près uniforme; donc l'axe CD doit tourner dans un plan horizontal, d'un mouvement à peu près uniforme.

Ici, l'expérience n'est pas propre à mettre en évidence la courbe décrite par le centre de gravité du tore; cette courbe est à très peu près un cercle horizontal ayant son centre en C.

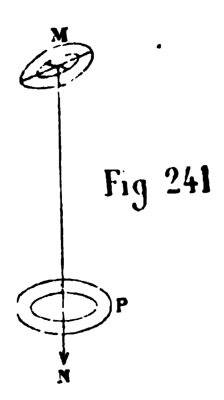


Fig 241

L'un des appareils imaginés par M. Gruey, au contraire, met bien en évidence le mouvement du centre de gravité. Il se compose encore d'un système CABD analogue à celui que nous venons de décrire, seulement le point C est suspendu à la Cardan, et la position de l'axe CD au repos est verticale. On peut dire que cet appareil se compose d'un pendule simple MN perpendiculairement auquel se trouve

un tore P que l'on peut animer d'une grande vitesse de rotation; la tige MN peut tourner librement autour du point M grâce à la suspension à la Cardan.

Mouvement d'un corps solide entièrement libre.

54. On connaîtra ce mouvement quand on pourra déterminer le mouvement absolu de l'un des points du corps, et le mouvement relatif du corps autour de ce point. Il y a tout avantage à choisir, pour ce point particulier, le centre de gravité G du corps; soient x_1, y_1, z_1 ses coordonnées; menons par le point G trois axes rectangulaires $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz; ces axes mobiles conserveront donc une direction constante; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du corps rapportées aux axes fixes, ξ, η, ζ les coordonnées du même point rapportées aux axes mobiles, X, Y, Z les composantes de la force appliquée à ce point; on aura :

$$(1)\qquad x = x_1 + \xi; \quad y = y_1 + \eta; \quad z = z_1 + \zeta,$$

$$(2)\qquad M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X; \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y; \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z.$$

On aura ensuite, comme on l'a déjà vu, les équations :

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) &= \Sigma(\xi Y - \eta X), \\ \Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) &= \Sigma(\eta Z - \zeta Y), \\ \Sigma m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) &= \Sigma(\zeta X - \xi Z). \end{aligned} \right.$$

Les équations (2) et (3) ont lieu pour un système matériel quelconque, et ces six équations sont généralement insuffisantes pour déterminer le mouvement du système; mais elles suffisent dans le cas d'un corps solide. Relativement au

point G considéré comme fixe, la position du corps solide dépendra en effet uniquement des trois angles d'Euler φ, ψ, θ; les équations (3) sont propres à déterminer ces trois variables.

On peut remarquer que les équations (3) du mouvement de rotation d'un corps solide autour de son centre de gravité, sont les mêmes que si ce centre était fixe; un corps solide tourne donc autour de son centre de gravité comme si ce centre était fixe.

En résumé, on déterminera le mouvement du centre de gravité par les équations (2); le mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité sera déterminé par les équations (3) que l'on pourra remplacer par les équations d'Euler, qui ne sont que des transformations des équations (3). Dans les applications les plus simples, il arrivera souvent que les seconds membres des équations (2) seront indépendants de φ, θ, ψ et les seconds membres de (3) de x_1, y_1, z_1; de sorte que les équations (2) et (3) constitueront deux systèmes séparés que l'on intègrera à part.

Dans quelques cas particuliers le problème se simplifie :

1° **Lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures.** — Le centre de gravité du solide aura un mouvement rectiligne et uniforme, et en même temps le mouvement du solide autour de son centre de gravité suivra les lois formulées par le théorème de Poinsot; l'ellipsoïde central des moments roulera sur un plan d'orientation constante, mené à une distance invariable du centre de gravité.

On voit néanmoins que si le mouvement d'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est des plus simples, il n'en est pas de même du mouvement d'un corps solide dans les mêmes conditions.

2° **Mouvement d'un corps pesant.** — Le centre de gravité décrit une parabole, et comme la résultante des actions de

la pesanteur sur les divers points du corps, passe constamment par le centre de gravité, les sommes des moments des forces extérieures par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ seront nulles; le mouvement relatif autour du centre de gravité sera donc le même que dans le cas précédent.

3° **Mouvement d'une sphère homogène, dont tous les points sont attirés par un centre fixe suivant la loi de Newton.** — La résultante des attractions passera par le centre de la sphère, qui est en même temps son centre de gravité, et elle variera en raison inverse du carré de la distance de ce point au centre fixe. Le mouvement autour du centre de gravité sera le même que si le centre de la sphère étant fixe, les divers points de cette sphère n'étaient soumis à l'action d'aucune force extérieure. Le mouvement de rotation initial ayant lieu autour d'un certain diamètre, qui sera toujours un axe principal d'inertie, se continuera indéfiniment autour de ce même axe, en restant uniforme. La même chose aurait lieu si la sphère était composée de couches concentriques homogènes.

55. Problème de la toupie. — Un corps solide pesant, homogène, de révolution autour d'une droite Iz passant par son centre de gravité G, a sa pointe I assujettie à se mouvoir sur un plan horizontal parfaitement poli MN. On demande d'étudier son mouvement.

Fig 242

Les forces qui agissent sur le corps sont : le poids GP $= \mu g$ du corps, appliqué au point G, et la réaction normale IQ $=$ Q du plan, laquelle est verticale.

Prenons trois axes rectangulaires fixes, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, l'origine O étant dans le plan MN, et l'axe $O\zeta$ étant vertical et dirigé vers le haut; soient, relativement à ces axes, ξ, η, ζ les coordonnées du point G. On aura, par le principe du mouvement du centre de gravité :

$$\mu \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0; \quad \mu \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0; \quad \mu \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Q - \mu g,$$

d'où, en désignant par α, β, α', β' quatre constantes arbitraires :

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha t + \alpha', \\ \eta = \beta t + \beta', \end{cases}$$

$$(2). \qquad Q = \mu\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g\right).$$

Les équations (1) montrent que le point H, projection du point G sur le plan fixe, est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. L'équation (2) fera connaître la réaction normale du plan, lorsque ζ sera connu en fonction de t.

Cherchons le mouvement relatif du corps autour du point G : Gz est un axe principal d'inertie pour le point G; deux axes quelconques Gx et Gy formant avec lui un système rectangulaire seront aussi des axes principaux d'inertie. Les moments d'inertie qui répondent à Gx et Gy seront égaux entre eux; soient A leur valeur et C le moment d'inertie relatif à Gz.

La troisième équation d'Euler, celle qui correspond à Gz, est en général :

$$(3) \qquad C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N,$$

N désignant la somme des moments des forces extérieures

par rapport à Gz; or, les deux forces extérieures GP et IQ rencontrent Gz; leurs moments sont nuls; donc :

$$N = 0;$$

on a du reste :

$$B = A,$$

et l'équation (3) donne :

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où, en désignant par n une constante :

(4) $$r = n.$$

Appliquons le théorème des forces vives.

Soit V la vitesse du point G; la force vive T du corps sera :

$$T = \mu V^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \mu\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) + A(p^2 + q^2) + Cn^2,$$

ou, en remplaçant ξ et η par leurs valeurs (1) :

$$T = \mu\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) + A(p^2 + q^2) + Cn^2.$$

Soient p_0 et q_0 les valeurs de p et q à l'époque initiale t_0; la variation de la force vive, pendant le temps $t - t_0$, sera :

$$T - T_0 = \mu\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0^2\right] + A(p^2 + q^2 - p_0^2 - q_0^2).$$

Cherchons les travaux des forces extérieures pendant le même temps; le travail de la réaction normale Q est nul; celui du poids est $\mu g(\zeta_0 - \zeta)$; on aura donc :

$$T - T_0 = 2\mu g(\zeta_0 - \zeta),$$

ou bien :

(5) $$u\left[\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0^2\right] + A(p^2 + q^2 - p_0^2 - q_0^2) = 2\mu g(\zeta_0 - \zeta).$$

Nous supposerons qu'à l'époque t_0, le centre de gravité du corps a été maintenu immobile, et qu'on s'est borné à imprimer au corps un mouvement de rotation autour de Gz; n sera la vitesse angulaire de ce mouvement, et nous aurons :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$
$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0,$$
$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = 0,$$

les équations (1) et (5) donneront :

$$\xi = \alpha'; \quad \eta = \beta'$$

$$\mu \frac{d\zeta^2}{dt^2} + A(p^2 + q^2) = 2\mu g(\zeta_0 - \zeta). \tag{6}$$

Le point H restera fixe pendant tout le mouvement, et le point G ne quittera pas la verticale HZ. Posons :

$$GI = l,$$
$$ZGz = \theta;$$

soit θ_0 la valeur initiale de θ, nous aurons :

$$\zeta = l \cos\theta, \tag{7}$$

et l'équation (6) donnera :

$$\mu l^2 \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} + A(p^2 + q^2) = 2\mu g l(\cos\theta_0 - \cos\theta). \tag{8}$$

Appliquons maintenant le théorème des moments des quantités de mouvement, dans le mouvement relatif, à l'axe GZ de direction invariable.

Les deux forces extérieures IQ et GP étant parallèles à GZ, leurs moments par rapport à cet axe sont nuls; donc, dans le mouvement relatif, la somme des moments des quantités de mouvement de tous les points du corps par rapport à GZ est constante; or, cette somme a pour

expression :

$$Ap \cos(x,Z) + Bq \cos(y,Z) + Cr \cos(z,Z)$$
$$= Ap(-\sin\varphi \sin\theta) + Aq(-\cos\varphi \sin\theta) + Cn \cos\theta.$$

Nous aurons donc :

$$-A \sin\theta (p \sin\varphi + q \cos\varphi) + Cn \cos\theta = \text{constante}.$$

p_0 et q_0 étant nuls, la constante est égale à $Cn \cos\theta_0$; donc :

$$(9) \qquad A \sin\theta (p \sin\varphi + q \cos\varphi) = Cn(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Or, on a :

$$p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt},$$

$$-p \cos\varphi + q \sin\varphi = \frac{d\theta}{dt},$$

d'où :

$$p^2 + q^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2},$$

et les équations (8) et (9) peuvent s'écrire :

$$(a) \quad A\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}\right) + \mu l^2 \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\mu g l (\cos\theta_0 - \cos\theta);$$

$$(b) \qquad A \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = Cn(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Ces deux équations donneront θ et ψ en fonction de t; la première montre que l'on a :

$$\cos\theta_0 - \cos\theta > 0,$$
$$\theta > \theta_0.$$

Ainsi, l'angle θ ne sera jamais inférieur à θ_0; si l'on suppose $n > 0$, l'équation (b) donne :

$$\frac{d\psi}{dt} < 0;$$

donc ψ ira sans cesse en diminuant.

En éliminant $\frac{d\psi}{dt}$ entre (*a*) et (*b*), on trouve :

$$(a')\ dt = \pm \frac{\sqrt{A + \mu l^2 \sin^2\theta}\,\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[2\mu g l \sin^2\theta - \frac{C^2 n^2}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\right]}},$$

on aura ensuite :

$$(b')\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{-Cn(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{A\sin^2\theta}.$$

A l'origine du mouvement, θ est égal à θ_0; on a vu que θ n'est jamais inférieur à θ_0; donc θ commence à croître, et dans la formule (a'), on doit commencer par prendre le signe $+$. Posons :

$$\cos\theta = u = \frac{\zeta}{l};$$

nous aurons :

$$(c)\quad dt = -\frac{\sqrt{A + \mu l^2(1 - u^2)}\,du}{\sqrt{(u_0 - u)\left[2\mu g l(1 - u^2) - \frac{C^2 n^2}{A}(u_0 - u)\right]}},$$

$$(d)\qquad \zeta = lu,$$

la formule (c) donne t en fonction de u par une intégrale ultra-elliptique.

Discussion. — Posons :

$$f(u) = 2\mu g l(1 - u^2) - \frac{C^2 n^2}{A}(u_0 - u),$$

nous trouverons :

$$\begin{aligned}
\text{Pour}\quad & u = -1, && f(u) = -\frac{C^2 n^2}{A}(1 + u_0) && < 0,\\
& u = u_0, && f(u) = 2\mu g l(1 - u_0^2) && > 0,\\
& u = +1, && f(u) = +\frac{C^2 n^2}{A}(1 - u_0) && > 0,\\
& u = +\infty, && f(u) < 0.
\end{aligned}$$

Donc, l'équation $f(u) = 0$ a ses deux racines réelles u' et u'' :

$$-1 < u' < u_0,$$
$$u'' > 1.$$

On pourra écrire :

$$f(u) = -2\mu g l\,(u - u')\,(u - u''),$$

et la formule (c) deviendra :

$$(c') \qquad dt = -\frac{\sqrt{\frac{A}{2\mu g l} + \frac{l}{2g}(1 - u^2)}\,du}{\sqrt{(u_0 - u)\,(u - u')\,(u'' - u)}}.$$

Le radical du dénominateur doit être réel; u'' étant > 1, $u'' - u$ sera toujours positif; on a vu que $u_0 - u$ est toujours positif; on devra donc avoir constamment :

$$u - u' \geqq 0,$$

d'où :

$$u \geqq u'.$$

Soit θ' la valeur de θ correspondante à u'; on aura :

$$\theta_0 < \theta < \theta',$$

θ oscille donc entre θ_0 et θ'.

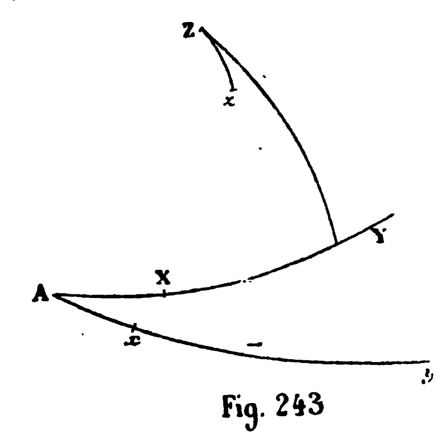


Fig. 243

Courbe décrite par la pointe de la toupie. — Soit $\rho = \mathrm{HI}$, et ω l'angle que fait la droite HI avec l'intersection du plan MN et du plan ZGY (GX, GY étant les deux axes fixes qui avec GZ forment un système rectangulaire); ρ et ω seront les coordonnées polaires du point I, H étant le pôle.

Construisons une figure sphérique, sur une sphère de rayon 1, ayant le point G pour centre; nous aurons :

$$Zz = \theta; \quad zZY = \omega,$$
$$AX = \psi.$$

Or, A est le pôle du grand cercle Zz;
X est le pôle du grand cercle ZY; donc :

$$\omega = \psi.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle rectangle IHG :

$$\rho = l \sin \theta = l \sqrt{1 - u^2},$$

donc ρ sera compris entre $l \sin \theta_0$ et $l \sin \theta'$.

Fig. 244

Ainsi, la courbe considérée sera comprise entre deux circonférences ayant pour centre le point H, et pour rayons :

$$HB = l \sin \theta_0; \quad HB' = l \sin \theta'.$$

Soit ε l'angle que fait avec le rayon vecteur la tangente à la courbe, en un point quelconque; on aura :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \frac{l \sqrt{1 - u^2}\, d\psi}{d.l \sqrt{1 - u^2}},$$

ou bien :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{1 - u^2}{u} \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{du}{dt}},$$

formule dans laquelle on remplacera $\frac{du}{dt}$ par sa valeur tirée de (C'), et $\frac{d\psi}{dt}$ par sa valeur

$$-\frac{Cn(u_0 - u)}{A(1 - u^2)}$$

conclue de (b') ; on trouvera ainsi :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{Cn}{Au}\sqrt{\frac{A}{2\mu g l} + \frac{l}{2g}(1-u^2)}\,\frac{\sqrt{u_0 - u}}{\sqrt{(u-u')(u'-u)}}.$$

On en conclut :

$$\text{pour} \quad u = u_0, \quad \varepsilon = 0,$$
$$u = u', \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, la courbe est normale à la circonférence HB, aux points où elle la rencontre, tandis qu'elle est tangente à la circonférence HB' ; la courbe a donc la forme indiquée par la figure 244.

CHAPITRE VI

FORCES INSTANTANÉES. — SUR LES PERCUSSIONS ET LE CHOC DES CORPS.

56. On comprend que, plus une force est grande, plus le temps nécessaire pour que cette force imprime une vitesse donnée à un point matériel sera petit. Les forces qui impriment des vitesses finies dans des temps très courts, produisent des déplacements très petits, car le déplacement est égal au produit de la vitesse, qui est finie, par le temps, qui est très petit. On nomme ces forces *percussions,* ou *forces instantanées*. Nous allons voir comment on les mesure.

Considérons une pareille force sollicitant un point matériel suivant Ox; supposons le point en repos pour $t = 0$, et la force agissant sur lui pendant le temps très court τ; nous aurons :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \tag{1}$$

$$m \frac{dx}{dt} = mv = \int_0^\tau X\, dt.$$

Donc, pour avoir la vitesse que possède le point matériel au temps τ, il n'est pas nécessaire de connaître la variation de la force X pendant ce temps, mais seulement l'intégrale :

$$\int_0^\tau X\, dt = X_1,$$

Si la force X est supposée constante, on aura :

$$X_1 = X\tau, \quad X = \frac{X_1}{\tau}.$$

Si la force X varie pendant le temps τ, on communiquera au point matériel la même vitesse, en faisant agir sur lui pendant le temps τ une force constante et égale à $\frac{X_1}{\tau}$.

On prend pour mesure de la percussion, la quantité $X_1 = \int_0^\tau X\,dt = mv$; donc, pour mesurer la percussion, on fera agir les forces instantanées sur un même point matériel partant du repos, pendant un temps très court, mais qui restera toujours le même, et on mesurera la quantité de mouvement communiquée au point matériel; on prendra le temps τ assez petit pour que le déplacement soit insensible, la vitesse communiquée étant cependant finie.

Supposons maintenant que, au moment où la force instantanée agit sur le point matériel, ce point ait déjà une certaine vitesse dirigée suivant Ox; nous aurons en intégrant l'équation (1), désignant par v_0 la vitesse du point matériel à l'époque t_0, où la force instantanée commence d'agir, par v sa vitesse au temps $t_0 + \tau$ où elle cesse :

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X\,dt = X_1.$$

Donc : *la percussion se mesure par l'augmentation de la quantité de mouvement du point matériel.*

Pour donner une percussion, on donne la direction de la force, et la quantité de mouvement $P_1 = m_1v_1$ que cette percussion agissant pendant le temps τ imprimerait à un point matériel de masse m_1 partant du repos. Si cette force agissait pendant le même temps τ sur un point matériel de masse m_2, elle lui communiquerait une quantité de mouvement $m_2v_2 = m_1v_1 = P_1$.

57. Effet d'une percussion P_1 sur un point matériel animé d'une vitesse v_0 ayant une direction différente de celle de la force instantanée. — MA est la vitesse v_0 en grandeur et en direction, MP_1 la percussion en grandeur et en direction; prenons $MA_1 = \frac{P_1}{m}$; la percussion communiquerait au point m partant du repos la vitesse MA_1; ce point a déjà la vitesse $MA = v_0$; la vitesse résultante sera MB.

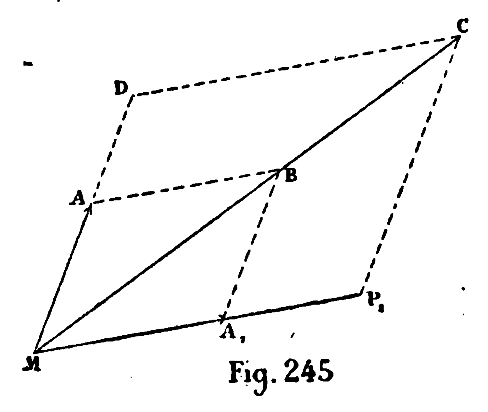


Fig. 245

Soit $MD = mv_0$ la quantité de mouvement du point M avant la percussion; la quantité de mouvement après la percussion sera MC, résultante de P_1 et de mv_0.

S'il y a deux ou plusieurs percussions, on les composera avec mv_0 par la règle du polygone des vitesses.

Lorsqu'une ou plusieurs forces agissent sur un point matériel soumis à l'instant t_0 à une percussion agissant pendant le temps τ, on n'a pas à s'occuper des forces ordinaires pendant le temps τ. On s'en sera occupé avant, ce qui aura permis de déterminer la vitesse à l'époque t_0, et par suite la quantité de mouvement correspondante MD; la méthode que nous venons d'indiquer fera connaître la vitesse et la quantité de mouvement du point M à l'époque $t_0 + \tau$. En résumé, sur un point matériel donné, des percussions quelconques surgissant à l'époque t ne changent pas sa position, mais sa vitesse, en grandeur et en direction, il y aura un changement des trois constantes dans les formules qui représenteront le mouvement du point matériel à partir de $t = t_0$.

58. Extension des théorèmes généraux aux percussions. — Considérons un système de points matériels en mouvement; faisons agir à un moment donné t_0, des percussions sur ces divers points, pendant le temps τ; nous aurons :

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma \sum X,$$

d'où, en multipliant par dt et intégrant pendant la durée très courte de la percussion :

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \Sigma \sum \int_{t_0}^{t_0+\tau} X\, dt.$$

Les forces ordinaires disparaissent de cette équation, car, pour de telles forces, l'intégrale $\int_{t_0}^{t_0+\tau} X\, dt$ est très petite; il n'en est pas de même des forces instantanées, et l'on a :

$$(a) \qquad \Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \Sigma \sum X_1,$$

ce que l'on peut écrire, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, et par M la masse du système :

$$M \frac{dx_1}{dt} - M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = \Sigma \sum X_1.$$

Donc : *le changement de vitesse produit par les percussions sur le centre de gravité du système est le même que si toute la masse y était concentrée, et si toutes les percussions extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.*

Remarque. — On peut écrire l'équation (*a*) et les deux

autres pareilles comme il suit :

$$\Delta\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma \sum X_1,$$

$$\Delta\Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma \sum Y_1,$$

$$\Delta\Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma \sum Z_1.$$

Extension des équations des moments. — On a relativement à un axe fixe quelconque l'équation :

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma \sum (xY - yX);$$

on en conclut, en multipliant par dt, et intégrant de $t = t_0$ à $t = t_0 + \tau$:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) - \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)_0$$
$$= \Sigma \sum \int_{t_0}^{t_0 + \tau} (xY - yX)\, dt;$$

on regarde les déplacements des divers points comme insensibles, pendant la durée de la percussion ; donc :

$$\int (xY - yX)\, dt = x \int Y\, dt - y \int X\, dt.$$

Pour les forces ordinaires, les intégrales $\int X\, dt$ et $\int Y\, dt$ seront insensibles ; pour les forces instantanées, il n'en sera pas de même ; on aura :

$$\int X dt = X_1; \quad \int Y dt = Y_1,$$

et il viendra :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)-\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)_0=\Sigma\sum(xY_1-yX_1).$$

Donc : *l'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à un axe fixe, est égale à la somme des moments des percussions par rapport au même axe.*

L'équation ci-dessus et les deux autres pareilles peuvent s'écrire :

$$\left\{\begin{aligned}\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=\Sigma\sum(xY_1-yX_1),\\ \Delta\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=\Sigma\sum(yZ_1-zY_1),\\ \Delta\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=\Sigma\sum(zX_1-xZ_1).\end{aligned}\right.$$

59. Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, soumis à des percussions et calcul des percussions exercées sur l'axe. — Prenons l'axe de rotation pour axe des z; soit ω_0 la vitesse de rotation à l'époque t où les forces instantanées viennent à agir; on peut obtenir la fixité de l'axe en fixant deux points O et O' de cet axe, situés à une distance donnée, $OO'=h$. On introduira les réactions de ces points, et le corps pourra être considéré comme libre; lorsque les forces instantanées viendront à agir, des pressions instantanées s'exerceront sur O et O'; nous introduirons des réactions égales et contraires aux percussions correspondantes. Soient A, B, C les composantes de cette percussion pour le point O, A', B', C' pour le point O'. En appliquant les équations du numéro précédent, nous aurons :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Delta\Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma X_1+A+A',\\
&\Delta\Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma Y_1+B+B',\\
&\Delta\Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma Z_1+C+C',\\
&\Delta\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma(yZ_1-zY_1)-hB';\\
&\Delta\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma(zX_1-xZ_1)+hA',\\
&\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma(xY_1-yX_1).
\end{aligned}\right.$$

X_1, Y_1, Z_1 désignent les composantes de la percussion qui agit sur le point x, y, z; les Σ des premiers membres s'étendent à tous les points du corps; ceux des seconds membres, seulement aux points où sont appliquées des percussions.

Les premiers membres peuvent être simplifiés par l'emploi des coordonnées polaires. Par un point quelconque du corps, posons :

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

on aura :

$$z=\text{const.}\quad \omega=\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y;\quad \frac{dy}{dt}=+\omega x;\quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Soient M la masse du corps, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité; on trouvera :

$$\begin{aligned}
&\Sigma m\frac{dx}{dt}=-\omega\Sigma my=-\omega My_1, &\quad& \Delta\Sigma m\frac{dx}{dt}=-My_1\Delta\omega,\\
&\Sigma m\frac{dy}{dt}=+\omega\Sigma mx=+\omega Mx_1, && \Delta\Sigma m\frac{dy}{dt}=+Mx_1\Delta\omega,\\
&\Sigma m\frac{dz}{dt}=0, && \Delta\Sigma m\frac{dz}{dt}=0,
\end{aligned}$$

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=-\omega\Sigma mxz,\qquad \Delta\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=-(\Sigma mxz)\Delta\omega,$$
$$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=-\omega\Sigma myz,\qquad \Delta\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=-(\Sigma myz)\Delta\omega,$$
$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\omega\Sigma mr^2,\qquad \Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=(\Sigma mr^2)\Delta\omega.$$

On trouvera donc, au lieu des équations (1), les suivantes :

$$(2)\quad\begin{cases}(\Sigma mr^2)\Delta\omega = \Sigma(xY_1-yX_1),\\ -hA' = \Sigma(zX_1-xZ_1)+(\Sigma myz)\Delta\omega,\\ +hB' = \Sigma(yZ_1-zY_1)+(\Sigma mxz)\Delta\omega,\\ C+C' = -\Sigma Z_1,\\ B+B' = -\Sigma Y_1 + Mx_1\Delta\omega,\\ A+A' = -\Sigma X_1 - My_1\Delta\omega.\end{cases}$$

Ces équations font connaître A', B', A, B et la somme $C + C'$.

Supposons qu'il n'y ait de percussion qu'en un point du corps, faisons passer le plan des xy par ce point dont les coordonnées seront :

$$z=0,\qquad x=\alpha,\qquad y=\beta,$$

les équations (2) deviendront :

$$(3)\quad\begin{cases}(\Sigma mr^2)\Delta\omega = \alpha Y_1-\beta X_1,\\ -hA' = -\alpha Z_1+(\Sigma myz)\Delta\omega,\\ +hB' = \beta Z_1+(\Sigma mxz)\Delta\omega,\\ B+B' = -Y_1 + Mx_1\Delta\omega,\\ A+A' = -X_1 - My_1\Delta\omega,\\ C+C' = -Z_1.\end{cases}$$

La vitesse angulaire sera augmentée de $\Delta\omega = \dfrac{\alpha Y_1-\beta X_1}{\Sigma mr^2}$, après la percussion.

Conditions pour que l'axe n'éprouve aucune percussion. — Il faut faire dans les formules précédentes :

$$A = B = C = A' = B' = C' = 0;$$

on trouve ainsi :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\omega = \frac{\alpha Y_1 - \beta X_1}{\Sigma m r^2},\\ &\Sigma myz = 0,\\ &\Sigma mxz = 0,\\ &\quad Z_1 = 0,\\ &X_1 + My_1\,\Delta\omega = 0,\\ &Y_1 - Mx_1\,\Delta\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit d'abord que la percussion doit agir dans un plan perpendiculaire à l'axe; ensuite, que Oz doit être l'un des axes principaux d'inertie relatifs au point O. Pour interpréter les deux dernières des équations (4), faisons passer le plan des zx par le centre de gravité G du corps; nous aurons :

$$y_1 = 0,$$
$$\Delta\omega = \frac{\alpha Y_1 - \beta X_1}{\Sigma m r^2},$$
$$X_1 = 0;$$

avec cette valeur de X_1, l'expression ci-dessus de $\Delta\omega$ devient :

$$(5)\qquad \Delta\omega = \frac{\alpha Y_1}{\Sigma m r^2},$$

$$(6)\qquad Y_1 = Mx_1\,\Delta\omega.$$

$X_1 = 0$, montre que la percussion doit être perpendiculaire au plan zOG, mené par l'axe de rotation et le centre de gravité G du corps; en reportant dans (6) la valeur de $\Delta\omega$ tirée de (5), on trouve :

$$Y_1 = Mx_1 \cdot \frac{\alpha Y_1}{\Sigma m r^2},$$

d'où :

$$ax_1 = \frac{\Sigma mr^2}{M}. \tag{7}$$

Soit MK^2 le moment d'inertie du corps relativement à une parallèle à l'axe de rotation menée par le centre de gravité ; on aura :

$$\Sigma mr^2 = Mx_1^2 + MK^2,$$

et la formule (7) donnera :

$$a = x_1 + \frac{K^2}{x_1}. \tag{8}$$

En résumé, on a les trois conditions suivantes, pour que l'axe n'éprouve pas de percussion :

1° *La direction de la percussion doit être perpendiculaire au plan qui passe par l'axe fixe, et par le centre de gravité du corps.*

2° *Cet axe doit être un des axes principaux pour le point où il rencontre le plan qui lui est perpendiculaire, et qui contient la force instantanée.*

3° *La distance de cette force à l'axe doit être liée à la distance du centre de gravité à cet axe par la formule :*

$$ax_1 = \Sigma mr^2, \quad \text{ou} \quad a = x_1 + \frac{K^2}{x_1},$$

Σmr^2 désignant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe fixe, et MK^2 le moment par rapport à une parallèle à l'axe fixe mené par le centre de gravité.

On appelle *centre de percussion* le point auquel la force instantanée doit être appliquée dans le plan zOG, pour que l'axe n'éprouve aucune percussion ; on voit que, si l'on suppose le corps pesant, et qu'on le suspende à l'axe Oz rendu horizontal, le point O sera le centre de suspension, et le centre de percussion coïncidera avec le centre d'oscillation.

Si l'axe fixe passe par le centre de gravité, il éprouvera toujours une percussion; car les formules :

$$Y_1 = M x_1 \Delta\omega, \quad \alpha = x_1 + \frac{K^2}{x_1},$$

nous donnent, dans le cas actuel, où $x_1 = 0$:

$$Y_1 = 0, \quad \alpha = \infty.$$

La percussion qui frappe le corps devrait donc être nulle, et le centre de percussion serait à l'infini.

Réciproquement. — Si le corps est en mouvement autour de l'axe et a une vitesse angulaire ω, on pourra l'arrêter brusquement, sans qu'il en résulte aucune percussion contre l'axe, en appliquant au centre de percussion une force instantanée égale à $M\omega x_1$, perpendiculaire au plan mené par ce centre de percussion et l'axe fixe.

Dans l'industrie du fer, on emploie des marteaux qu'une roue à cames, animée d'une grande vitesse, soulève, et qui retombent ensuite librement sur l'enclume; le marteau peut tourner autour d'un axe fixe; l'action de la came sur le marteau peut être assimilée à une percussion; le point où le marteau subit le choc de la came doit être le centre de percussion, afin que l'axe fixe autour duquel tourne le marteau, n'ait pas à subir des percussions qui ne tarderaient pas à mettre l'appareil hors de service.

Remarque. — *Trouver les conditions pour que tous les points de l'axe sauf un n'éprouvent aucune percussion.* — Reprenons les équations générales :

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma m r^2 \Delta\omega &= \alpha Y_1 - \beta X_1, \\ -hA' &= \gamma X_1 - \alpha Z_1 + (\Sigma m y z)\Delta\omega, \\ +hB' &= \beta Z_1 - \gamma Y_1 + (\Sigma m x z)\Delta\omega, \\ C + C' &= -Z_1, \\ B + B' &= -Y_1 + M x_1 \Delta\omega, \\ A + A' &= -X_1 - M y_1 \Delta\omega, \end{aligned} \right.$$

où nous n'avons fait aucune hypothèse sur les positions des plans xOy et xOz. Nous voulons que l'on ait :

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0.$$

Remarquons que si cela a lieu pour un point, cela aura lieu pour tous les points de Oz, sauf pour le point O. Les trois premières des équations ci-dessus donnent :

$$(c) \qquad \begin{cases} \beta Z_1 - \gamma Y_1 = -(\Sigma mxz)\,\Delta\omega, \\ \gamma X_1 - \alpha Z_1 = -(\Sigma myz)\,\Delta\omega, \\ \alpha Y_1 - \beta X_1 = +\Sigma m\,(x^2 + y^2)\,\Delta\omega. \end{cases}$$

L'équation de l'ellipsoïde central du point O est :

$$F(\xi,\eta,\zeta) = \xi^2\,\Sigma m\,(y^2 + z^2) + \eta^2\,\Sigma m\,(z^2 + x^2) + \zeta^2\,\Sigma m\,(x^2 + y^2)$$
$$- 2\eta\zeta\,\Sigma myz - 2\zeta\xi\,\Sigma mzx - 2\xi\eta\,\Sigma mxy - 1 = 0.$$

Le plan diamétral conjugué P_1 de l'axe Oz a pour équation :

$$F'_\zeta = 0,$$

ou bien:

$$\zeta\,\Sigma m\,(x^2 + y^2) - \eta\,\Sigma myz - \xi\,\Sigma mxz = 0,$$

ou :

$$(d) \qquad a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

en faisant :

$$a = -\Sigma mxz; \quad b = -\Sigma myz; \quad c = \Sigma m\,(x^2 + y^2).$$

On déduit des équations (c) :

$$(e) \qquad \frac{\beta Z_1 - \gamma Y_1}{a} = \frac{\gamma X_1 - \alpha Z_1}{b} = \frac{\alpha Y_1 - \beta X_1}{c}.$$

Telles sont les deux conditions cherchées; on peut les rem-

placer par les deux suivantes :

$$(f) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$
$$(g) \qquad aX_1 + bY_1 + cZ_1 = 0.$$

(f) exprime que le point d'application de la percussion est dans le plan (P); (g) que ce plan est parallèle à la percussion; donc, en somme, les conditions cherchées sont que la percussion doit être contenue dans le plan diamétral conjugué de l'axe de rotation, relativement à l'ellipsoïde central du point O.

L'origine de ce théorème est que si le corps a un point fixe O, et s'il est soumis à une percussion AP, il tournera d'abord, comme on le verra plus loin, n° 61, après la percussion, autour du diamètre conjugué du plan AOP, relativement à l'ellipsoïde central du point O.

60. Centre de percussion d'une surface plane. — *Considérons une surface plane* S *assujettie à tourner autour d'un axe fixe* Oz, *situé dans son plan; la surface est d'abord immobile; on demande en quel point de la surface doit frapper une percussion, pour que l'axe n'éprouve aucune percussion.* Ce point porte le nom de *centre de percussion* de la surface.

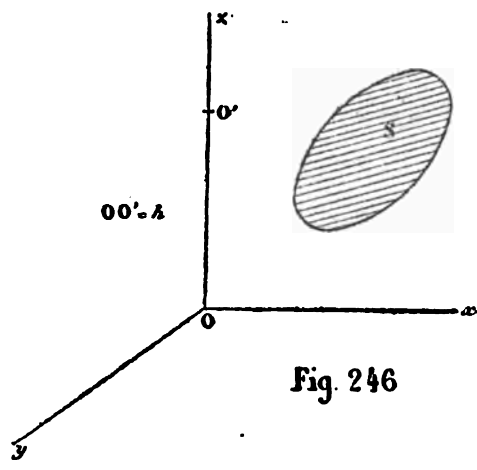


Fig. 246

Prenons le plan de la surface S pour plan des xz; fixons deux points O et O' de l'axe; introduisons les réactions instantanées de ces deux points; ou plutôt les percussions correspondantes (A, B, C en O, A', B', C' en O');

nous aurons :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta\Sigma m\frac{dx}{dt}=X_1+A+A',\\
&\Delta\Sigma m\frac{dy}{dt}=Y_1+B+B',\\
&\Delta\Sigma m\frac{dz}{dt}=Z_1+C+C',\\
&\Delta\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\beta Z_1-\gamma Y_1-hB',\\
&\Delta\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\gamma X_1-\alpha Z_1+hA',\\
&\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\alpha Y_1-\beta X_1.
\end{aligned}\right.$$

En représentant les composantes de la percussion par X_1, Y_1, Z_1, et les coordonnées de son point d'application par α, β, γ; on aura du reste :

$$\beta=0.$$

Après le choc, la surface tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire ω; les vitesses de tous les points sont parallèles à Oy, et l'on a :

$$\frac{dx}{dt}=0;\quad \frac{dy}{dt}=\omega x;\quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Par conséquent :

$$\Delta\Sigma m\frac{dx}{dt}=0;\quad \Delta\Sigma m\frac{dy}{dt}=\omega\,\Sigma m x;\quad \Delta\Sigma m\frac{dz}{dt}=0.$$

$$\Delta\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=-\omega\,\Sigma m x z,$$

$$\Delta\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=0,$$

$$\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\omega\,\Sigma m x^2.$$

En substituant dans (1), et faisant :

$$A = B = C = A' = B' = C' = 0,$$

il vient :

$$X_1 = 0; \quad \omega\, \Sigma mx = Y_1; \quad Z_1 = 0,$$
$$-\omega\, \Sigma mxz = -\gamma Y_1; \quad \omega\, \Sigma mx^2 = \alpha Y_1.$$

La percussion doit donc être parallèle à Oy, et on aura pour son point d'application :

$$\alpha = \frac{\Sigma mx^2}{\Sigma mx}; \quad \beta = 0; \quad \gamma = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}.$$

La vitesse angulaire de la rotation sera :

$$\omega = \frac{Y_1}{\Sigma mx}.$$

61. Pendule balistique. — Le pendule balistique est

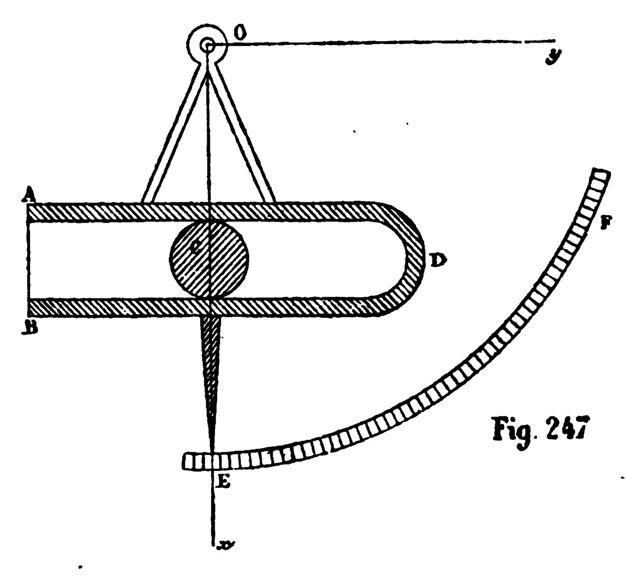


Fig. 247

destiné à mesurer la vitesse d'un boulet à sa sortie du canon. Il se compose d'un mortier en fonte fixé à un cadre

de suspension en fer, lequel peut osciller librement autour d'un axe horizontal O. Le mortier renferme une matière compressible dont la fonction est de recevoir la vitesse du projectile et de l'amortir, sans que la rupture de l'appareil puisse avoir lieu; cette matière compressible est généralement de la terre ou du sable; on tire à bout portant; après le choc, le pendule s'élève d'une quantité que l'on mesure; il s'agit d'en déduire la vitesse du boulet.

Nous pouvons concevoir que les choses se passent de la manière suivante; au commencement du choc, le pendule est en repos, le boulet aussi en C; brusquement, on imprime à tous les points du boulet des vitesses égales à V, et parallèles à l'horizontale Oy; alors, l'ensemble du pendule et du boulet prend un mouvement de rotation autour de l'axe horizontal Oz de suspension; nous aurons, en désignant par τ la durée très courte du choc :

$$\Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\left\{x\int_0^\tau Y\,dt - y\int_0^\tau X\,dt\right\},$$

ou bien, en remarquant que :

$$X = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\tau Y\,dt = Y_1,$$

en désignant par Y_1 la percussion appliquée au point x, y

$$(1) \qquad \Delta\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma x Y_1.$$

Soit $d\mu$ l'élément de masse du boulet; on aura :

$$Y_1 = V\,d\mu,$$

$$(2) \qquad \Sigma x Y_1 = \Sigma V x\,d\mu = V\Sigma x\,d\mu = V\mu f,$$

en posant $OC = f$, et désignant par μ la masse du boulet.

En représentant par ω la vitesse angulaire, après le choc, du mouvement de rotation de l'ensemble du pendule et du

boulet, par Σmr^2 le moment d'inertie de cet ensemble par rapport à l'axe de rotation Oz, on a :

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \omega\,\Sigma mr^2; \tag{3}$$

(1) devient, en ayant égard à (2) et (3) :

$$\omega\,\Sigma mr^2 = V\mu f,$$

d'où :

$$V = \frac{\omega}{\mu f}\Sigma mr^2. \tag{4}$$

On connaîtra donc V, si l'on détermine ω, Σmr^2 et f; f se mesure aisément.

Détermination de ω. — Soit l la longueur du pendule simple synchrone au pendule composé, y compris le boulet; soit $OM_0 = l$; prenons un point pesant M_0, relié au point O par une tige sans masse OM_0; la vitesse initiale v_0 du point M_0 sera :

$$v_0 = \omega l;$$

Fig 248

le point matériel va décrire l'arc de cercle M_0M; soit v la vitesse de ce point quand il sera en M, on aura :

$$v^2 - v_0^2 = -2g \times M_0H,$$

ou bien :

$$v^2 - v_0^2 = -2gl(1 - \cos\theta),$$

d'où :

$$v^2 = \omega^2 l^2 - 4gl\sin^2\frac{\theta}{2};$$

le pendule s'élèvera jusqu'à ce que l'on ait $v = 0$; soit α la valeur correspondante de θ; on aura donc :

$$0 = \omega^2 l^2 - 4gl\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

d'où :

(5)
$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

On mesure l'angle α sur le cercle gradué EF, le long duquel se meut un curseur que l'aiguille E pousse devant elle, aussi longtemps qu'elle monte.

Il faut donc déterminer l; pour cela, on fait osciller tout l'appareil, pendule et boulet, et on détermine la durée T des petites oscillations; on a ensuite :

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d'où :

(6)
$$l = \frac{gT^2}{\pi^2}.$$

Il faut encore calculer Σmr^2; soient a la distance du centre de gravité du système à l'axe Oz, M la masse du système; on a :

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma},$$

d'où :

(7)
$$\Sigma mr^2 = Mal.$$

En tenant compte de (5), (6) et (7), (4) donne :

$$V = \frac{2}{\pi} g T \frac{M}{\mu} \frac{a}{f} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

On peut encore écrire, en désignant par P le poids du pendule balistique, augmenté de celui du boulet et par p celui du boulet :

(8)
$$V = \frac{2}{\pi} g T \frac{P}{p} \frac{a}{f} \sin\frac{\alpha}{2},$$

et tout est connu dans le second membre de cette formule.

L'appareil est construit de façon que le point C soit le

centre de percussion; autrement, l'appareil serait rapidement mis hors d'usage.

62. Effet d'un nombre quelconque de percussions sur un corps solide fixé en un de ses points O. — Soient, au moment où les percussions viennent à agir, Ox, Oy, Oz les positions des axes principaux d'inertie du point O; nous savons que l'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement des divers points du corps, relativement à un axe fixe quelconque, est égal à la somme des moments des percussions par rapport à cet axe; or, les sommes des moments des quantités de mouvement relativement à Ox, Oy, Oz sont égales respectivement à Ap, Bq, Cr; si donc on désigne par L, M, N les sommes des moments des percussions par rapport à ces mêmes axes principaux, on aura :

$$A\Delta p = L; \quad B\Delta q = M; \quad C\Delta r = N.$$

Et, si p_0, q_0, r_0 désignent les valeurs de p, q, r avant les percussions; p_1, q_1, r_1 ces valeurs après, on aura :

$$p_1 = p_0 + \frac{L}{A}; \quad q_1 = q_0 + \frac{M}{B}; \quad r_1 = r_0 + \frac{N}{C}.$$

Les valeurs des angles φ, ψ, θ sont les mêmes avant et après les percussions :

$$\varphi_1 = \varphi_0; \quad \psi_1 = \psi_0; \quad \theta_1 = \theta_0.$$

En traitant les percussions comme des forces, et les transportant parallèlement à elles-mêmes au point O, chaque percussion donnera une force et un couple; tous ces couples se composeront en un seul, le couple de percussion; les projections sur les axes de coordonnées de l'axe de ce couple seront respectivement L, M, N; le couple des percussions aura pour équation :

$$(1) \qquad Lx + My + Nz = 0.$$

Considérons le cas où le corps est en repos avant les percussions ; on aura :

$$p_1 = \frac{L}{A}; \quad q_1 = \frac{M}{B}; \quad r_1 = \frac{N}{C}.$$

Le corps va donc commencer à tourner autour d'une certaine droite OH, et on aura :

$$(2) \qquad \frac{\cos(\mathrm{HO}x)}{\left(\frac{L}{A}\right)} = \frac{\cos(\mathrm{HO}y)}{\left(\frac{M}{B}\right)} = \frac{\cos(\mathrm{HO}z)}{\left(\frac{N}{C}\right)}.$$

Considérons le diamètre conjugué du plan (1) relativement à l'ellipsoïde central du point O :

$$(3) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Soient α, β, γ les cosinus des angles qu'il forme avec les axes ; l'équation du plan (1) pourra aussi s'écrire :

$$(4) \qquad \alpha Ax + \beta By + \gamma Cz = 0;$$

en écrivant que (1) et (4) sont identiques, il vient :

$$\frac{\alpha}{\left(\frac{L}{A}\right)} = \frac{\beta}{\left(\frac{M}{B}\right)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{N}{C}\right)};$$

en comparant ces équations aux équations (2), on en conclut :

$$\cos(\mathrm{HO}x) = \alpha; \quad \cos(\mathrm{HO}y) = \beta; \quad \cos(\mathrm{HO}z) = \gamma.$$

Donc : *le corps commence à tourner autour du diamètre conjugué du plan du couple des percussions, relativement à l'ellipsoïde central du point fixe.*

Choc des corps sphériques.

63. Nous considérerons deux sphères homogènes animées de mouvements de translation rectilignes et uni-

formes, suivant la droite Ox qui joint leurs centres; soient v la vitesse de la sphère M, v' celle de M' avant le choc; supposons ces vitesses de même sens pour fixer les idées, et $v > v'$; il y aura évidemment un choc, et il est clair qu'après le choc, les mouvements des deux sphères seront encore des mouvements de translation rectilignes et uniformes, suivant la droite Ox; il s'agit seulement de déterminer les nouvelles vitesses.

Nous désignerons les masses des deux sphères par m et m'; pendant le choc, les parties de M' exercent des actions sur les parties de M, avec lesquelles elles sont en contact; transportons toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité du corps M déformé, centre de gravité qui ne coïncidera plus avec le centre de figure; la résultante de toutes ces forces transportées sera

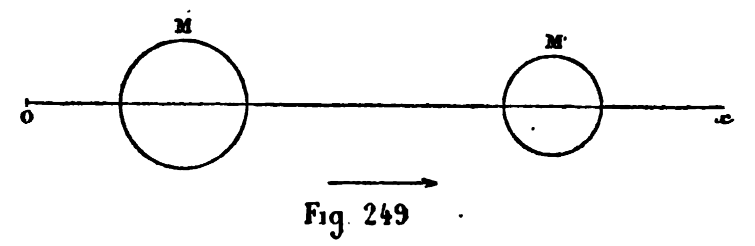


Fig. 249

dirigée suivant xO; désignons son intensité par $-$ R, et soit à l'instant considéré x l'abscisse du centre de gravité de M; nous aurons, en vertu du principe du mouvement du centre de gravité :

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -R.$$

Faisons de même pour le corps M'; à cause de l'égalité de l'action et de la réaction, la résultante des forces transportées au centre de gravité de M' sera évidemment $+$ R, et nous aurons :

$$(2) \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = +R.$$

On déduit des équations ci-dessus :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0, \tag{3}$$

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = \text{const.} \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) ont lieu à un instant quelconque du choc; elles avaient lieu avant le choc, puisqu'il n'y avait pas de forces extérieures. La constante a pour expression $mv + m'v'$; on a donc, avant et pendant le choc :

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = mv + m'v'. \tag{5}$$

Ainsi, la somme des quantités de mouvement n'est pas altérée par le choc; pour aller plus loin, il nous faut maintenant considérer deux cas :

1° *Les corps sont entièrement dépourvus d'élasticité.*

Tant que la vitesse de M sera supérieure à celle de M′, les deux corps se comprimeront; ils cesseront de se comprimer, lorsque les deux vitesses seront égales; alors, les corps resteront dans l'état où ils se trouvent à ce moment; n'étant pas du tout élastiques, ils ne tendront pas à reprendre leurs formes primitives; à partir de ce moment, la quantité R sera nulle constamment, on aura donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

d'où, en désignant par u la vitesse commune :

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dx'}{dt} = u,$$

et (5) donnera, avec ces valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$:

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}. \tag{6}$$

Si $v > 0$, $v' > 0$, on aura $u > 0$.

Si v et v' sont de signes contraires, il en sera de même des quantités de mouvement mv et $m'v'$; u aura le signe de la plus grande quantité de mouvement; si on a :

$$m'v' = -mv,$$

on aura $u = 0$, le choc réduira les deux corps au repos.

2° *Les corps sont parfaitement élastiques.*

On déduit des équations (1) et (2) :

$$2m\frac{dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{2m'\,dx'\,d^2x'}{dt^2} = 2\mathrm{R}\,(dx' - dx),$$

ou bien :

$$d\left\{m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2}\right\} = 2\mathrm{R}\,(dx' - dx) = 2\mathrm{R}\,dr,$$

en posant :

$$x' - x = r.$$

Donc on a :

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2} = 2\int\mathrm{R}\,dr + \mathrm{C}.$$

L'intégrale commence avec le choc; à ce moment on a :

$$\mathrm{C} = mv^2 + m'v'^2,$$

donc :

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2} = mv^2 + m'v'^2 + 2\int\mathrm{R}\,dr, \tag{7}$$

r est la distance des centres de gravité des deux corps.

Pendant la première partie du choc, les corps se compriment, r diminue, $2\int\mathrm{R}dr$ est négatif, on a :

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2} < mv^2 + m'v'^2.$$

Cela continue jusqu'au moment où les vitesses sont

égales, les corps cessant alors de se comprimer; mais comme nous les supposons élastiques, ils vont tendre à reprendre leurs formes primitives; M va pousser M′ dans le sens Ox, M′ poussera M dans le sens xO; r va augmenter; si pour des valeurs de r équidistantes du minimum R reprend les mêmes valeurs, si les deux phases du choc sont identiques, on dit que les corps sont parfaitement élastiques; l'intégrale $2\int R\,dr$, prise depuis le commencement du choc, jusqu'au moment où les corps vont se séparer, sera nulle; soient donc V et V′ les vitesses des deux sphères après le choc, on aura :

$$mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2. \tag{8}$$

On sait du reste qu'on doit avoir :

$$mV + m'V' = mv + m'v'. \tag{9}$$

Les équations (8) et (9) détermineront V et V′; on peut les écrire :

$$m(v + V)(v - V) = m'(v' + V')(V' - v')$$
$$m(v - V) = m'(V' - v').$$

On en tire donc :

$$v + V = V' + v'. \tag{10}$$

La vitesse relative était avant le choc $v - v'$; elle est après le choc $V - V'$; l'équation (10) montre que ces vitesses relatives sont égales et de signes contraires; ainsi, la vitesse relative avec laquelle le centre de gravité de M s'éloigne de celui de M′ après le choc, est égale à celle avec laquelle il s'en rapprochait avant le choc. Les équations (9) et (10) donnent du reste :

$$V = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} = v' + \frac{m - m'}{m + m'}(v - v'), \tag{11}$$

$$V' = \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'} = v + \frac{m - m'}{m + m'}(v - v'). \tag{12}$$

CAS PARTICULIERS. — 1° $mv + m'v' = 0$.

En remplaçant dans (11) $m'v'$ par $-mv$, on trouve :

$$V = -v,$$

on aurait de même :

$$V' = -v'.$$

Ainsi : *la vitesse de* M *prend, après le choc, une valeur égale et de signe contraire à celle d'avant le choc; de même pour* M'.

2° $v = 0$, $m = m'$.

(11) et (12) donnent :

$$V = v'; \quad V' = 0.$$

Ainsi : *quand les deux sphères ont des masses égales, si l'une d'elles est en repos, l'autre lui transmettra sa vitesse après le choc et restera immobile.* C'est l'expérience que l'on fait dans les cabinets de physique avec des billes d'ivoire suspendues.

Théorème de Carnot. — Dans le cas des corps mous, en se reportant à la formule (7), on voit que l'intégrale $2\int R\,dr$, ayant tous ses éléments négatifs, est négative; donc, après le choc, on doit avoir :

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2} < mv^2 + m'v'^2,$$

ou bien :

$$(m + m')u^2 < mv^2 + m'v'^2.$$

Il y a donc eu perte de force vive; c'est ce qu'il est facile de vérifier; on a en effet :

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = mv^2 + m'v'^2 - \frac{(mv + m'v')^2}{m + m'}$$
$$= \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2.$$

Cette différence est bien positive. On peut lui donner une autre forme; on peut écrire en effet :

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = m(V - u)^2 + m'(u - V')^2.$$

On peut donc dire que : *La force vive perdue pendant le choc de corps entièrement mous est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées.* C'est le théorème de Carnot.

CHAPITRE VII

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

64. Nous nous proposons de chercher les conditions d'équilibre d'un système de points matériels unis entre eux d'une manière quelconque et sollicités par des forces données quelconques.

Définition de la *vitesse virtuelle*. — Supposons le système transporté d'une position à une position infiniment voisine, compatible avec les conditions de liaison imposées au système; un point M du système viendra en m, un point M' en m' ...; on appelle vitesse virtuelle de l'un quelconque des points M, la droite Mm, ou le déplacement infiniment petit du point considéré. Le mot *virtuel* veut dire que le déplacement est seulement possible, mais qu'il n'a pas réellement lieu, et l'on n'a pas à considérer les forces qui le produiraient.

Définition du *moment virtuel*. — Soient P, P' ... des forces appliquées aux points M, M' ...; projetons la vitesse virtuelle Mm sur la force P; le produit $P \times mn$ est le *moment virtuel* de la force P. On voit qu'il est égal au *produit de la force par la projection du déplacement sur la direction de la force.*

On donne à ce moment le signe + quand la projection

est dirigée dans le sens de la force, le signe — quand elle est dirigée suivant son prolongement.

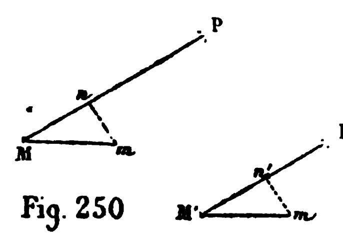


Fig. 250

Le moment virtuel est nul quand la force est perpendiculaire au déplacement.

On voit que le moment virtuel de la force P est égal au travail élémentaire de la force P, quand le déplacement virtuel Mm coïncide avec le déplacement réel.

Le moment virtuel est susceptible d'une autre expression; soit mMP $= \psi$, M$m = \delta s$, on a :

$$Mn = \delta s \cos \psi,$$

et le moment virtuel est égal dans tous les cas à :

$$P \, \delta s \cos \psi = \delta s \times P \cos \psi,$$

c'est à dire au produit de la vitesse virtuelle par la composante de la force suivant la direction de cette vitesse.

Soient X, Y, Z les composantes de la force P suivant trois axes rectangulaires, δx, δy, δz les projections de la vitesse virtuelle sur ces trois axes; les cosinus des angles de MP avec les axes sont :

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{P};$$

les cosinus des angles de Mm avec ces mêmes axes sont :

$$\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \frac{\delta z}{\delta s}.$$

On en conclut :

$$\cos \psi = \frac{X}{P}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P}\frac{\delta z}{\delta s},$$

$$P \delta s \cos \psi = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Donc, le moment virtuel de la force P a ces trois expressions :

$$P\,(\delta s \cos \psi), \quad \delta s\,(P \cos \psi), \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

65. Moment virtuel de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point matériel. — Soient les deux forces P et Q appliquées au point M, R leur résultante; on a :

$$\begin{aligned} \text{Moment virtuel de } P &= Mm \times \text{Proj. } P \text{ sur } Mm, \\ \text{—} \qquad Q &= Mm \times \text{Proj. } Q \text{ sur } Mm, \\ \text{—} \qquad R &= Mm \times \text{Proj. } R \text{ sur } Mm; \end{aligned}$$

or :

$$\text{proj. de } R = \text{proj. de } P + \text{proj. de } Q,$$

donc :

$$\text{mom. virtuel de } R = \text{mom. virtuel de } P + \text{mom. virtuel de } Q.$$

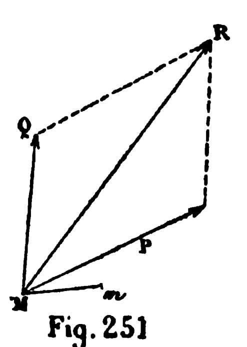


Fig. 251

Le théorème s'étend de lui-même à un nombre quelconque de forces.

Donc, le moment virtuel de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel est égal à la somme algébrique des moments virtuels des composantes.

66. Théorème. — *Si l'on applique aux extrémités d'une droite rigide et inflexible* AB *deux forces égales et contraires dirigées suivant cette droite, leurs moments virtuels seront égaux et de signes contraires.*

Soient en effet les deux forces AP et BQ, AP = BQ, Aa et Bb les vitesses virtuelles des points A et B; on a $ab = AB$;

$$\begin{aligned} \text{moment virtuel de } AP &= -P \times Aa', \\ \text{—} \qquad \text{de } BQ &= +P \times Bb'; \end{aligned}$$

or la droite ab faisant avec AB un angle infiniment petit du premier ordre, on a $a'b' = ab$, en négligeant les infiniment petits du second ordre; ou bien :

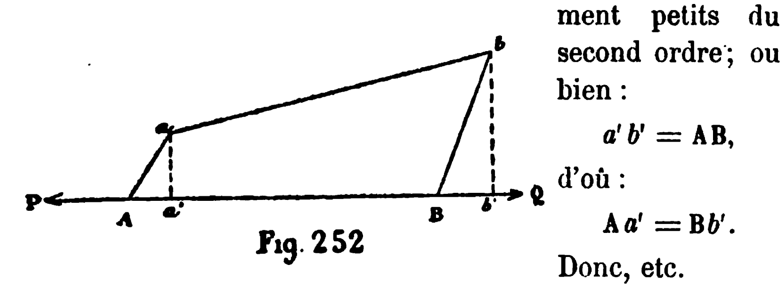


Fig. 252

$$a'b' = \mathrm{AB},$$

d'où :

$$\mathrm{A}a' = \mathrm{B}b'.$$

Donc, etc.

67. Équations exprimant les liaisons. — Considérons un système de points matériels $\mathrm{M}(x, y, z)$, $\mathrm{M}'(x', y', z')$ ..., un certain nombre de points pourront être assujettis à rester sur des courbes ou des surfaces données; les distances de certains points du système pourront être invariables, ou avoir entre elles des relations données.

D'une manière générale, on aura un certain nombre d'équations entre les coordonnées des points :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, x', y', z' \ldots) = 0, \\ \varphi(x, y, z, x', y', z' \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Soit p le nombre des points qui forment le système; les équations (1) seront au plus au nombre de $3p - 1$; lorsqu'il en est ainsi, le système est dit *à liaisons complètes;* s'il y a moins de $3p - 1$ équations, le système est dit *à liaisons incomplètes.*

Dans un système à liaisons complètes, toutes les coordonnées peuvent être considérées comme des fonctions déterminées d'une seule variable indépendante.

$$\begin{array}{ll} x = \mathrm{F}_1(u), & x' = \chi_1(u) \ldots, \\ y = \mathrm{F}_2(u), & y' = \chi_2(u) \ldots, \\ z \quad \mathrm{F}_3(u), & z' = \chi_3(u) \ldots. \end{array}$$

Chacun des points du système ne peut décrire qu'une courbe déterminée: quand le point M se déplace de M en *m* sur la courbe qu'il décrit, il entraîne les autres points M′ en *m′* ... sur leurs courbes respectives.

Un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe constitue un système à liaisons complètes.

68. Démonstration du principe des vitesses virtuelles dans le cas d'un système à liaisons complètes. — Nous adopterons la démonstration d'Ampère.

Considérons un pareil système; soient $MP = P$ la résultante des forces appliquées au point M, $M'P' = P'$ celle des forces appliquées en M′, etc. Le principe des vitesses virtuelles consiste dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des moments virtuels des forces appliquées aux différents points du système soit égale à zéro.*

Soient :

p la projection de la vitesse virtuelle de M sur la direction de P,
p' — M′ — P′,
....

Je dis que la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est que l'on ait :

$$Pp + P'p' + \dots = 0.$$

Prenons d'abord deux points du système M et M′. Introduisons un nouveau point N; assujettissons-le à se mouvoir sur une surface donnée, et lions-le aux points M et M′ par deux droites rigides et inflexibles; pour une position donnée des points M et M′, le point N ne pourra se déplacer que sur un cercle, et comme il doit rester sur une surface donnée, il en résulte qu'il ne pourra se mouvoir que sur

une certaine courbe B, lorsque le point M se déplacera sur la courbe A, M′ sur A′, etc... Appliquons aux deux extrémités de la droite rigide et inflexible M′N les deux forces égales et opposées S et — S, agissant suivant cette droite; appliquons de même aux deux extrémités de la droite

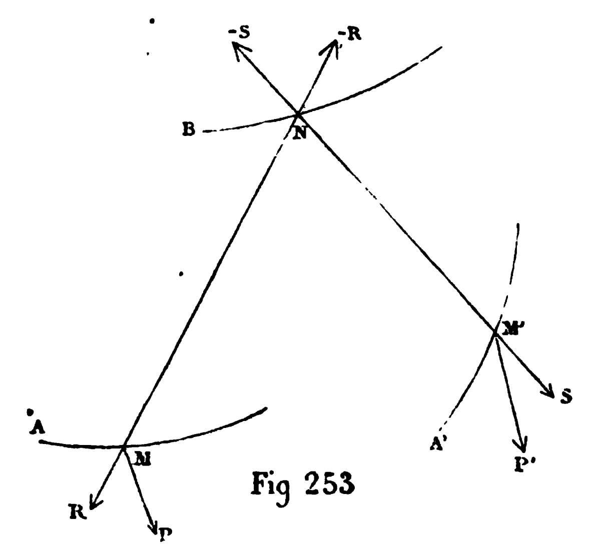


Fig 253

rigide et inflexible MN les deux forces égales et opposées R et — R, agissant suivant cette droite; nous ne changerons rien aux conditions du système; c'est à dire que, si l'équilibre avait lieu tout d'abord, il aura encore lieu, et s'il n'existait pas, ce n'est pas l'introduction du point N et de nos quatre forces S, — S, R, — R qui aura pu l'établir.

La somme des moments virtuels des forces S et — S appliquées aux extrémités de la tige rigide et inflexible M′N est nulle; il en est de même de la somme des moments virtuels de R et — R; donc, la somme des moments virtuels de P et P′ est égale à la somme des moments virtuels des six forces P, R, — R, — S, S, P′.

Actuellement, déterminons l'intensité de la force S de manière que la résultante de S et P′ soit normale à la

courbe M′, puis l'intensité de la force — R de manière que la résultante des forces — S et — R soit normale à la courbe B; la somme des moments virtuels de S et P′ sera nulle, celle de — S et — R sera nulle aussi; donc la somme des moments virtuels des six forces P, R, — R, S, — S, P′ est égale à la somme des moments virtuels des forces P et R, et comme la somme des moments virtuels des six forces doit être égale à celle des forces P et P′, on voit que la somme des moments virtuels de P et R est égale à celle de P et P′.

En résumé, sans rien changer aux conditions de l'équilibre, on a introduit un point N dans le système et on est arrivé à ce résultat qu'en appliquant une nouvelle force R au point M, le point M′ et le point N (par suite de l'introduction de forces convenablement choisies) sont soumis à des forces normales à leurs trajectoires respectives, et la somme des moments virtuels des deux forces P et R appliquées au point M est égale à la somme des moments virtuels des forces P et P′.

On considèrera un troisième point du système M″, un point auxiliaire N′ qui jouera relativement à M et M″ le même rôle que N relativement à M et M′, et on verra qu'on pourra faire en sorte que ces points M″ et N′ soient soumis à des forces normales à leurs trajectoires respectives, à la condition d'appliquer en M une nouvelle force dont le moment virtuel sera égal à celui de M″. Donc, en somme on aura le résultat suivant :

Au lieu de p points dans le système à liaisons complètes, on en aura $p + p - 1 = 2p - 1$; tous ces points sont sollicités par des forces normales à leurs trajectoires respectives, sauf le point M, qui, au lieu d'être soumis à la force unique P, est maintenant soumis à l'action de $p - 1$ forces nouvelles dont les moments virtuels sont égaux respectivement à ceux des forces primitives P′, P″ ... Tous les

points du nouveau système sont en équilibre d'eux-mêmes, sauf le point M; si ce point est en équilibre, tout le système y sera; si le point M n'est pas en équilibre, il se mettra en mouvement sur sa courbe et entraînera les autres. Donc, pour que tout le système primitif soit en équilibre, il faut et il suffit que le point M soit en équilibre, sous l'action des p forces qui lui sont actuellement appliquées; soit Σ la résultante de ces p forces; il faut et il suffit, pour l'équilibre, que cette résultante soit normale à la courbe A, ou que son moment virtuel soit nul. Or, le moment virtuel de Σ est égal à la somme des moments virtuels des p forces P, P′, P″ ... appliquées aux points M, M′, M″ ... Donc, la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre du système est que l'on ait l'équation :

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots = 0.$$

Il faut remarquer que dans cette équation les rapports $\frac{p'}{p}$, $\frac{p''}{p}$, ..., sont déterminés.

69. Démonstration du principe dans le cas des liaisons incomplètes. — Il y a moins de $3p - 1$ équations de condition. Le système n'est pas à liaisons complètes; on peut lui faire prendre non pas un seul mouvement, mais une infinité. Considérons l'un quelconque de ces mouvements, qui deviendrait le seul possible, si aux équations de condition données, on en ajoutait de nouvelles, de manière à rendre le système à liaisons complètes. Il est nécessaire que, relativement au mouvement considéré, la somme des moments virtuels soit égale à zéro.

Car, supposons que l'équilibre existe tout d'abord; on ne le troublera pas en gênant les mouvements des différents points du système, de manière à réduire ces mouvements à un seul, celui dont nous avons parlé; le système devra être en équilibre à plus forte raison. Mais, si la somme des

moments virtuels n'était pas nulle, le système prendrait le mouvement considéré. Donc, pour qu'aucun des mouvements compatibles avec les liaisons du système n'ait lieu, il faut que, pour chacun de ces mouvements, la somme des moments virtuels soit égale à zéro.

Réciproquement. — Si cette condition est remplie, l'équilibre a lieu. Car, si un mouvement s'accomplissait, ce mouvement serait déterminé. Introduisons d'autres liaisons ne gênant pas ce mouvement, mais gênant les autres, si l'on tentait de les accomplir, nous aurons alors un système à liaisons complètes; puisque le mouvement a lieu, c'est que la somme des moments virtuels n'est pas nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse. La condition énoncée est donc nécessaire et suffisante.

Ainsi, pour tous les mouvements possibles, on doit avoir l'équation :

$$Pp + P'p' + P''p'' \ldots = 0.$$

Autre forme de l'équation des vitesses virtuelles. — A la force P, substituons ses composantes X, Y, Z; de même considérons le déplacement du point M comme résultant des trois déplacements δx, δy, δz; nous aurons :

$$\text{mom. virtuel de } P = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

et l'équation des vitesses virtuelles deviendra :

$$(1) \qquad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

70. Conditions d'équilibre d'un système. — Nous allons montrer comment on déduit du principe des vitesses virtuelles les conditions d'équilibre d'un système donné.

Supposons que les liaisons qui existent entre les divers points du système soient exprimées par les équations :

$$(2) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \ldots,$$

entre les coordonnées des divers points du système x, y, z, x', y', z'... Soient $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x'$, ... des variations infiniment petites compatibles avec les liaisons; nous devrons avoir entre ces variations les relations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \frac{dM}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \frac{dN}{dx}\delta x + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Soit i le nombre des équations de condition; i des variations $\delta x, \delta y$, ... au nombre de $3p$, seront des fonctions linéaires des $3p - i$ variations restantes, lesquelles seront arbitraires. En reportant ces i variations dans (1), on aura une fonction linéaire des $3p - i$ variations arbitraires; et cette fonction devra être nulle quelles que soient les $3p - i$ variations. Le coefficient de chacune de ces variations devra donc être nul; on aura ainsi $3p - i$ équations qui, combinées avec les i équations de condition, donneront $3p$ équations propres à déterminer les $3p$ coordonnées x, y, z, x', y', z', ... des points du système, dans la position, ou dans les positions d'équilibre.

Il y a $3p - i$ équations d'équilibre.

Élimination par la méthode des facteurs. — Multiplions les équations (3) respectivement par les facteurs indéterminés λ, μ, ν ... et ajoutons l'ensemble à l'équation (1); nous aurons :

$$(4)\quad \left.\begin{array}{l} \left(X + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots\right)\delta x \\ + \left(Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots\right)\delta y \\ + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Nous avons dit que i variations sont fonction des $3p - i$ variations restantes, lesquelles sont indépendantes. Profitons de l'indétermination de λ, μ, ν ... pour annuler dans (4) les coefficients des i variations dépendantes; les autres étant indépendantes, on devra égaler à zéro leurs coefficients. On aura donc en somme les $3p$ équations :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} X + \lambda\dfrac{dL}{dx} + \mu\dfrac{dM}{dx} + \nu\dfrac{dN}{dx} + \ldots = 0, \\ Y + \lambda\dfrac{dL}{dy} + \mu\dfrac{dM}{dy} + \nu\dfrac{dN}{dy} + \ldots = 0, \\ Z + \lambda\dfrac{dL}{dz} + \mu\dfrac{dM}{dz} + \nu\dfrac{dN}{dz} + \ldots = 0, \\ X' + \lambda\dfrac{dL}{dx'} + \mu\dfrac{dM}{dx'} + \nu\dfrac{dN}{dx'} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

(2) et (5) forment un système de $3p + i$ équations contenant les $3p + i$ inconnues $x, y, z, x', y', z' \ldots \lambda, \mu, \nu$.

Réciproquement. — Si ces équations ont lieu, l'équilibre aura lieu aussi; car en multipliant les équations (5) respectivement par δx, δy ... et ajoutant, on a :

$$0 = \left\{\begin{array}{l} X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta x' + \ldots \\ + \lambda\left(\dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots\right) \\ + \mu\left(\dfrac{dM}{dx}\delta x + \ldots\right) \\ + \ldots, \end{array}\right.$$

et en vertu de (3) cette équation se réduit à :

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

De la signification mécanique des facteurs λ, μ, ν. — Dans les équations (5), chaque équation de condition $L = 0$

est représentée par un terme $\lambda \frac{dL}{dx}$, $\lambda \frac{dL}{dy}$...; si l'équation de condition n'existait pas, mais qu'à X on ajoutât une force $\lambda \frac{dL}{dx}$, à Y, $\lambda \frac{dL}{dy}$..., les équations (5) resteraient les mêmes. On peut donc dire que la liaison $L = 0$ produit les forces suivantes :

en m $\begin{cases} \lambda \frac{dL}{dx} \text{ suivant } Ox, \\ \lambda \frac{dL}{dy} \quad - \quad Oy, \\ \lambda \frac{dL}{dz} \quad - \quad Oz, \end{cases}$

en m' $\begin{cases} \lambda \frac{dL}{dx'} \text{ suivant } Ox, \\ \lambda \frac{dL}{dy'} \quad - \quad Oy, \\ \lambda \frac{dL}{dz'} \quad - \quad Oz. \end{cases}$

La résultante de la force appliquée en m, et provenant de la liaison $L = 0$ sera :

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2};$$

le cosinus de l'angle que fait cette force avec Ox sera :

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}},$$

Si, dans l'équation $L = 0$, on considère x, y, z comme seules variables, on aura l'équation d'une surface; la force considérée précédemment sera dirigée suivant la normale à cette surface.

71. Application du principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions d'équilibre d'un corps solide entièrement libre. — Nous considérons le corps solide comme formé d'un nombre p de points matériels dont les distances mutuelles sont invariables; soient M, M', M'' trois de ces points. Le nombre des coordonnées de tous les points du système est $3p$. Il y aura d'abord trois équations de condition pour exprimer que les côtés du triangle MM'M'' sont invariables; pour chacun des $p - 3$ autres points tels que M''', il faudra trois conditions pour exprimer que les longueurs MM''', M'M''', M''M''' sont invariables; on aura donc en tout :

$$3(p-3)+3=3p-6$$

équations de liaison, entre les $3p$ coordonnées; donc, il y aura six conditions d'équilibre.

On trouvera ces six conditions en imprimant au corps solide six mouvements virtuels simples, indépendants les uns des autres.

1° **Translation parallèle à** Ox. — C'est un mouvement virtuel possible; pour ce mouvement on a :

$$\delta y^{(i)}=0, \quad \delta z^{(i)}=0,$$
$$dx=dx'=\ldots$$

L'équation

(1) $$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0$$

donne :

$$\sum(X)=0.$$

On trouvera de même :

$$\sum(Y)=0, \quad \sum(Z)=0.$$

2° **Rotation infiniment petite autour d'un des axes coordonnés.** — Pour une rotation infiniment petite $\delta\theta$ autour

de Oz, on a :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \text{const.},$$
$$\delta x = -y\,\delta\theta, \quad \delta y = +x\,\delta\theta, \quad \delta z = 0,$$

et l'équation (1) se réduit à :

$$\delta\theta\,\Sigma(xY - yX) = 0.$$

On trouvera donc les six conditions suivantes :

$$\sum(X) = 0; \quad \sum(Y) = 0; \quad \sum(Z) = 0;$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0; \quad \Sigma(zX - xZ) = 0; \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Ces conditions sont distinctes ; ce sont les six équations de l'équilibre.

72. Sur une propriété de l'équilibre relative aux maxima et aux minima. — Reprenons l'équation

$$(1) \qquad \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

qui donne les conditions d'équilibre d'un système quelconque, en y adjoignant les équations entre les variations δx, δy ... fournies par les équations qui expriment les liaisons. Supposons qu'il existe une fonction des forces U, c'est à dire que, sans tenir compte des liaisons, on ait :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = \dfrac{dU}{dx}, \quad Y = \dfrac{dU}{dy}, \quad Z = \dfrac{dU}{dz}, \\ X' = \dfrac{dU}{dx'} \ldots \end{array} \right.$$

On en conclura :

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \frac{dU}{dx'}\delta x' + \ldots = \delta U.$$

On devra donc avoir l'équation :

$$(3) \qquad \delta U = 0,$$

en observant que les variations δx, δy ... doivent être considérées dans l'équation (3) comme liées entre elles par les équations de condition qu'on déduit des équations qui expriment les liaisons du système.

Il en résulte qu'en général, dans la position d'équilibre, la fonction des forces U sera un maximum ou un minimum, en tenant compte des liaisons du système. Ainsi, supposons que les liaisons permettent d'exprimer toutes les variables x, y, z ... en fonction d'un certain nombre de variables indépendantes λ, μ ...; on devra avoir, U pouvant être exprimée également à l'aide de ces variables, les équations :

$$(4) \qquad \frac{dU}{d\lambda} = 0; \quad \frac{dU}{d\mu} = 0...$$

Ce sont les équations mêmes que l'on rencontrerait, si l'on cherchait à trouver le maximum ou le minimum de la fonction U, des variables indépendantes λ, μ ...; on sait que quand on aura trouvé les valeurs de λ, μ ... qui vérifient les équations (4), il n'en résultera pas nécessairement que ces valeurs répondent à un maximum ou à un minimum de U.

On voit, quoi qu'il en soit, que dans le cas considéré, où il existe une fonction des forces, on aura, pour trouver les conditions d'équilibre, à résoudre la même question analytique que s'il s'agissait de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction U d'un certain nombre de variables indépendantes λ, μ ... C'est là un principe que Maupertuis avait proposé sous le nom de *loi du repos*.

Nous verrons plus loin que, quand la fonction U est un maximum, l'équilibre est stable.

Les équations (2) sont vérifiées lorsque les forces qui

agissent sur les divers points du système ne sont autre chose que les actions de la pesanteur sur ces points; on a dans ce cas, en prenant l'axe des z vertical et dirigé vers le bas :

$$\left.\begin{array}{lll} X = 0, & Y = 0, & Z = mg \\ X' = 0, & Y' = 0, & Z' = m'g \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right\} U = g(mz + m'z' + \ldots),$$

et l'équation (1) devient :

$$m\delta z + m'\delta z' + \ldots = \delta(mz + m'z' \ldots) = 0.$$

Soit z_1 l'ordonnée du centre de gravité du système; on aura :

$$U = gz_1 \Sigma m; \quad \delta z_1 = 0.$$

Ainsi, quand on considère un certain nombre de points pesants liés entre eux d'une manière quelconque, on trouvera la position d'équilibre du système en cherchant, parmi toutes les positions compatibles avec les liaisons, celle pour laquelle le centre de gravité sera le plus bas possible. La position dans laquelle le centre de gravité sera le plus bas possible sera une position d'équilibre stable.

Exemples. — 1° *Étant donné un fil homogène pesant, dont les deux extrémités sont fixes, et dont la longueur est donnée, trouver sa position d'équilibre.* — On l'obtiendra en cherchant, à l'aide du calcul des variations, parmi toutes les courbes passant par les deux points fixes, et ayant une longueur donnée, celle dans laquelle le centre de gravité de la courbe est le plus bas possible; on trouve ainsi la chaînette.

2° Un ellipsoïde pesant homogène, étant placé sur un plan horizontal, son centre de gravité ou son centre de figure sera le plus bas possible, lorsque l'ellipsoïde touchera le plan fixe par l'une des extrémités du plus petit des trois axes; alors, l'équilibre sera stable.

3° Considérons un corps solide attirant un point matériel suivant la loi de Newton; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de ce point, V le potentiel du corps relatif à ce point, on aura :

$$X = f\mu \frac{dV}{dx}; \quad Y = f\mu \frac{dV}{dy}; \quad Z = f\mu \frac{dV}{dz}.$$

Nous aurons donc pour l'équilibre :

$$\frac{dV}{dx_0} = 0, \quad \frac{dV}{dy_0} = 0, \quad \frac{dV}{dz_0} = 0.$$

Si nous considérons un point voisin du point attiré, en désignant ses coordonnées par :

$$x = x_0 + h; \quad y = y_0 + k; \quad z = z_0 + l,$$

nous aurons :

$$V = V_0 + \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{d^2V}{dx_0^2} + k^2 \frac{d^2V}{dy_0^2} + l^2 \frac{d^2V}{dz_0^2} + 2kl \frac{d^2V}{dy_0\, dz_0} + 2lh \frac{d^2V}{dz_0\, dx_0} + 2hk \frac{d^2V}{dx_0\, dy_0}\right) + \ldots$$

Pour que V_0 soit un maximum, il faut qu'on ait :

$$\frac{d^2V}{dx_0^2} < 0, \quad \frac{d^2V}{dy_0^2} < 0, \quad \frac{d^2V}{dz_0^2} < 0;$$

pour un minimum, au contraire, on devrait avoir :

$$\frac{d^2V}{dx_0^2} > 0, \quad \frac{d^2V}{dy_0^2} > 0, \quad \frac{d^2V}{dz_0^2} > 0.$$

Mais, si le point attiré ne fait pas partie de la masse même du corps, on a, comme on sait :

$$\frac{d^2V}{dx_0^2} + \frac{d^2V}{dy_0^2} + \frac{d^2V}{dz_0^2} = 0.$$

Donc, en écartant le cas exceptionnel où $\frac{d^2V}{dx_0^2}$, $\frac{d^2V}{dy_0^2}$, $\frac{d^2V}{dz_0^2}$

seraient nuls tous les trois, on voit que ces trois quantités ne peuvent pas avoir le même signe, que ce signe soit du reste le signe + ou le signe —. Donc V, qui est ici la fonction des forces, n'est généralement ni un maximum ni un minimum, contrairement à une assertion que l'on trouve dans quelques traités de Mécanique.

Applications du principe des vitesses virtuelles.

73. Les machines employées dans l'industrie sont en général des systèmes à liaisons complètes. Soient P la puissance qui doit vaincre la résistance R, δp le chemin parcouru par le point d'application de la puissance projeté sur la direction de la puissance, δr le chemin parcouru par le point d'application de la résistance projeté sur la direction de cette force; le principe des vitesses virtuelles nous fournira l'équation :

$$P\delta p + R\delta r = 0;$$

or, ici δp et δr sont identiques à dp, dr; on aura donc :

$$Pdp + Rdr = 0.$$

Donc, les forces sont en raison inverse des chemins parcourus par leurs points d'application, ces chemins étant projetés sur les forces correspondantes. C'est là une remarque qui avait été faite par Galilée, qui avait vérifié ce théorème dans un certain nombre de machines simples et le regardait comme une propriété générale de l'équilibre des machines; c'est là l'origine du principe des vitesses virtuelles.

1° **Presse à coin.** — Soient ABC un coin isocèle, A'B'C' une position infiniment voisine; on doit avoir, pour l'équilibre :

$$P \times BH = R \times DB'.$$

BB′ est égal et parallèle à AA′, le triangle DBB′ est isocèle, et l'on a :

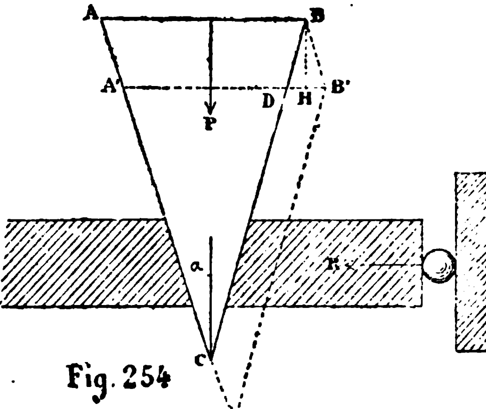


Fig. 254

$$DB' = 2B'H$$
$$= 2BH \operatorname{tg} \alpha;$$

donc :

$$P = 2R \operatorname{tg} \alpha,$$
$$R = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

La résistance que l'on pourra vaincre avec une puissance donnée sera d'autant plus grande que α sera plus petit.

2° **Balance de Roberval.** — La balance de Roberval se compose essentiellement d'un parallélogramme articulé CDEF, dont les côtés CD et EF restent toujours verticaux; la droite verticale AB qui réunit les milieux des côtés CD et EF est fixe. HK et ML sont des bras horizontaux, attachés aux côtés EF et CD; aux points K et M de ces bras on suspend des poids P et Q; on demande la condition d'équilibre.

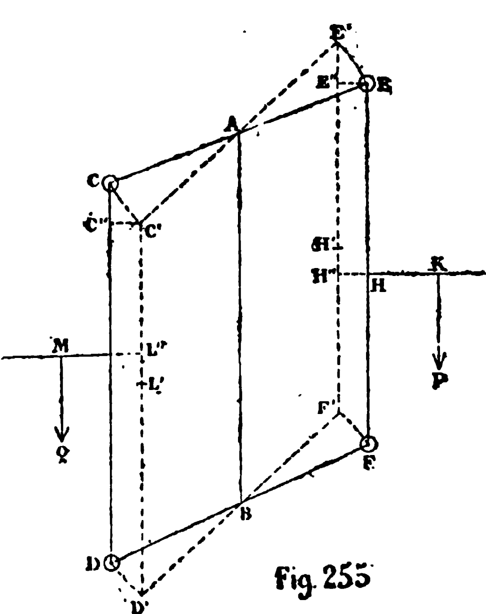


Fig. 255

Considérons la position infiniment voisine C′D′E′F′ du parallélogramme. Soient H′ et L′ les nouveaux points d'attache des bras, on doit avoir :

$$P \times H'H'' = Q \times L'L'',$$

ou :

$$P \times E'E'' = Q \times CC''.$$

Or, E′E″ et CC″ sont les projections sur la verticale des cordes égales EE′ et CC′ également inclinées sur cette verticale ; donc :

$$E'E'' = CC'', \quad P = Q.$$

Ainsi, l'équilibre aura lieu pour P = Q, quels que soient les points K et M des bras horizontaux, où l'on applique les poids, et quelle que soit la position du parallélogramme articulé.

3° **Équilibre du genou.** — OA est une tige solide pouvant tourner autour du point fixe O; AB est une autre tige solide dont l'extrémité A est articulée avec la tige OA,

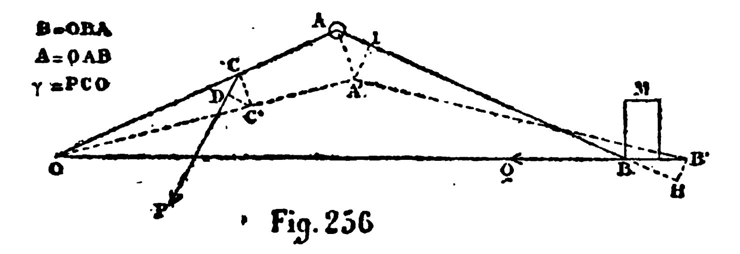


Fig. 256

l'extrémité B étant astreinte à se mouvoir sur une droite fixe OB; la puissance P est appliquée en un point C de OA; la résistance Q est appliquée en B et dirigée suivant la droite BO; on demande la condition d'équilibre.

Soient :

$$OA = a, \quad OC = c, \quad PCO = \gamma.$$

Considérons le genou dans la position infiniment voisine

OA′B′, menons C′D perpendiculaire sur P, A′I et B′H perpendiculaires sur AB; le principe des vitesses virtuelles nous donne l'équation :

$$\text{(1)} \qquad P \times CD = Q \times BB',$$

$$CD = CC' \sin \gamma;$$

or on a :

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{c}{a}; \quad \text{donc :} \quad CD = \frac{c}{a} \sin \gamma . AA',$$

$$BH = BB' \cos B,$$

mais BH = AI si on néglige les infiniment petits du second ordre, donc :

$$BB' = \frac{AI}{\cos \beta},$$

$$AI = AA' \sin A; \quad \text{donc :} \quad BB' = \frac{AA' \sin A}{\cos B},$$

l'équation (1) donne donc :

$$P \times \frac{c}{a} \sin \gamma \, AA' = \frac{Q \sin A}{\cos B} AA',$$

$$\frac{Pc \sin \gamma}{a} = \frac{Q \sin A}{\cos B},$$

$$Q = P \times \frac{c}{a} \frac{\sin \gamma \cos B}{\sin A}.$$

Toutes choses égales d'ailleurs, la résistance Q, qu'on pourra vaincre avec une puissance donnée P, sera d'autant plus grande que $\sin \gamma$ sera plus voisin de 1, ou γ de 90°; supposons $\gamma = 90°$; alors :

$$Q = P \frac{c}{a} \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Supposons de plus le genou isocèle, c'est à dire OA = AB; alors :

$$2B + A = 180°;$$

$$\sin A = \sin 2B,$$

$$Q = P \frac{c}{2a \sin B}.$$

Si B est petit, avec la puissance P, on pourra vaincre une très grande résistance.

4° **Pont-Levis de Belidor.** — AB est le tablier du pont, mobile autour d'une horizontale projetée en A, C son

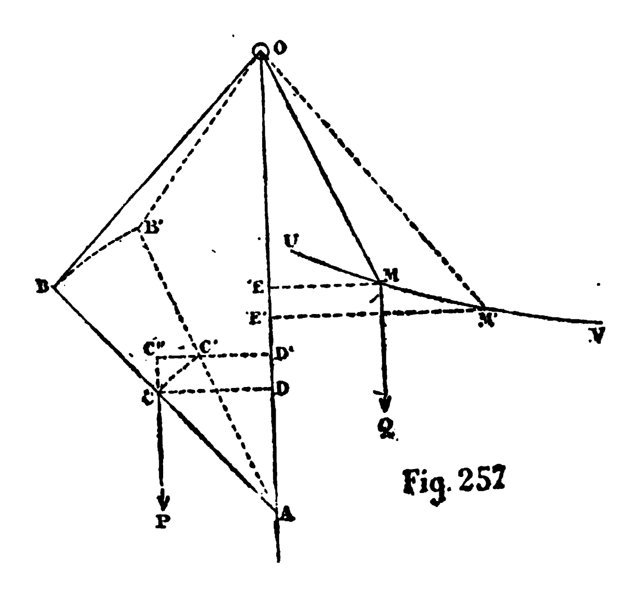


Fig. 252

centre de gravité, supportant le poids P du tablier; une chaîne part de B, s'enroule sur un treuil dont l'axe est projeté en O, sur la verticale du point A, la chaîne se continue en OM et porte un poids Q; le point M est assujetti à se mouvoir sur une courbe UV; on demande de déterminer cette courbe UV de manière que l'équilibre ait lieu dans toutes les positions du système.

Posons :

$$AC = a, \quad AB = b, \quad OA = h, \quad BAO = \varphi, \quad MOA = \omega, \quad MO = \rho.$$

Soit l la longueur de la chaîne, $l = OB + OM$; on aura :

$$OB = l - \rho; \quad AD = a \cos \varphi; \quad OE = \rho \cos \omega.$$

Considérons la position infiniment voisine du système; on devra avoir :

$$- \mathrm{P} \times \mathrm{DD}' + \mathrm{Q} \times \mathrm{EE}' = 0,$$
$$\mathrm{DD}' = d.\mathrm{AD} = d.a \cos \varphi,$$
$$\mathrm{EE}' = d.\mathrm{OE} = d.\rho \cos \omega,$$

donc :

(1) $$- \mathrm{P}a\, d.\cos \varphi + \mathrm{Q}d.\rho \cos \omega = 0.$$

Or :

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AO}}^2 - 2\, \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AO}} \cos \varphi,$$

ou :

(2) $$(l - \rho)^2 = b^2 + h^2 - 2bh \cos \varphi,$$

d'où :

$$d.\cos \varphi = -\frac{1}{2bh}\, d.(l - \rho)^2;$$

(1) devient donc :

(3) $$\frac{\mathrm{P}a}{2bh}\, d.(l - \rho)^2 + \mathrm{Q}\, d.\rho \cos \omega = 0.$$

Si l'équation de la courbe UV était donnée,

(4) $$\rho = f(\omega),$$

on déduirait de (3) et (4) la position sur cette courbe du point M, qui répond à l'équilibre. Si l'on veut que l'équilibre ait lieu dans toutes les positions, on doit considérer l'équation (3) comme étant l'équation différentielle de la courbe; on en déduit, en désignant par C une constante arbitraire :

(5) $$\rho \cos \omega = \mathrm{C} - \frac{\mathrm{P}a}{2\mathrm{Q}\, bh}\, (l - \rho)^2.$$

On peut montrer que cette équation représente une ovale de Descartes, c'est à dire que l'on peut trouver sur la droite OA un point fixe O' tel que ρ' désignant la

distance MO', on ait :

$$\rho + n\rho' = f,$$

n et f désignant des constantes.

Supposons maintenant qu'en vertu des conditions initiales on ait :

$$C = \frac{Pal^2}{2abh},$$

l'équation (5) donnera, en posant $\frac{Qbh}{Pa} = m$:

$$\rho = 2l - 2m \cos \omega,$$

équation d'un limaçon de Pascal.

CHAPITRE VIII

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

74. On a vu, dans le chapitre précédent, comment les équations d'équilibre d'un système quelconque de points soumis à des liaisons déterminées par des équations quelconques peuvent être déduites d'une formule générale. Le mouvement d'un système de points liés entre eux d'une manière quelconque peut de même être déterminé par un principe général, dû à d'Alembert.

Considérons un système de points matériels en mouvement M, M' ...; soient x, y, z, x', y', z' ... les coordonnées de ces points; les liaisons s'exprimeront par des équations de condition entre ces coordonnées, qui pourront également contenir le temps. Soient ces équations :

$$f(t, x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0,$$
$$\varphi(t, x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le mouvement du système, le point M décrit une certaine courbe C, le point M' une courbe C' ...

Soit P la résultante des forces qui agissent sur le point M, P' la résultante de celles qui agissent sur M' ...; le point M ne se meut pas sous l'action de la force P, comme s'il était libre, à cause de sa liaison avec les autres points du système;

soit P_1 la force qu'il faudrait appliquer à chaque instant au point M supposé libre, pour produire le mouvement que ce point possède dans le système considéré; soit de même P'_1 la force qu'il faudrait appliquer au point M' supposé libre, pour produire le mouvement de ce point... La force P peut être considérée comme étant la résultante de la force P_1 et d'une autre force P_2 ...; nous pourrons donc considérer notre système de points matériels, comme liés les uns aux autres d'une certaine manière, et soumis aux forces P_1 et P_2 pour M, P'_1 et P'_2 pour M' ... et prenant le mouvement observé.

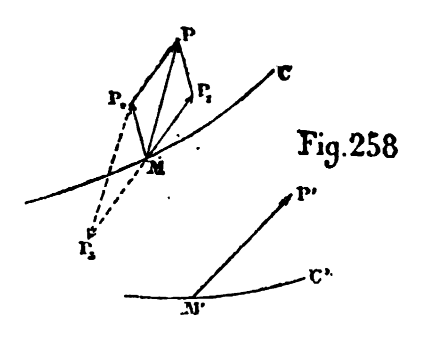


Fig. 258

Imaginons un système identique de points matériels libres, non soumis aux liaisons, et où les points M, M' ... seraient sollicités par les forces P_1, P'_1 ...; les deux systèmes auront le même mouvement; ainsi les forces P_1 sans les liaisons produisent le même mouvement que les forces P_1 et P_2 avec les liaisons. Donc les forces P_2 jointes aux liaisons ne modifient pas le mouvement; les liaisons ne servent qu'à détruire les forces P_2. Ces forces P_2 ont été appelées par d'Alembert les *forces perdues;* on a donc le théorème suivant dû à d'Alembert :

Dans un système en mouvement, les forces perdues se font équilibre à chaque instant, en tenant compte des liaisons du système.

Autre manière de présenter le principe. — La force P_2 peut être considérée comme étant la résultante de la force P et d'une force P_3 égale et contraire à P_1; donc, l'ensemble des forces P et P_3 se font équilibre, en tenant

compte des liaisons du système, c'est à dire sur le système gêné; on peut donc énoncer ainsi le théorème :

Dans le mouvement d'un système quelconque de points soumis à des liaisons et sollicités par des forces quelconques, il y a équilibre à chaque instant, au moyen de ces liaisons, entre ces forces et des forces égales et directement opposées à celles qui produiraient pour chaque point matériel, supposé libre, le mouvement qu'il a réellement.

Les efforts exercés sur le système peuvent varier à chaque instant; ils sont produits par les forces variables P_2 qui s'y font constamment équilibre.

75. Équations générales du mouvement d'un système. — En vertu du principe de d'Alembert, toutes les questions de mouvement se trouvent ramenées à des questions d'équilibre; en combinant ce principe avec celui des vitesses virtuelles, on obtient une équation qu'on peut appeler l'équation générale de la Dynamique.

Désignons par X, Y, Z les composantes connues de la force totale appliquée au point M, dont la masse est m et les coordonnées x, y, z; soient X', Y', Z', x', y', z' les mêmes éléments pour le point M' de masse m'... La force MP_1 aura pour composantes $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$; les composantes de P_2 seront :

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

la force P a d'ailleurs pour composantes X, Y, Z; donc les composantes des forces P_2, P'_2, etc., seront :

$$(P_2) \qquad X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$(P'_2) \qquad X' - m\frac{d^2x'}{dt^2}, \quad Y' - m\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad Z' - m\frac{d^2z'}{dt^2}.$$

Toutes les forces P_1, P'_1 ... doivent se faire équilibre à chaque instant sur le système, en tenant compte des liaisons. Si donc, à un instant quelconque, δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ... sont des variations infiniment petites quelconques des coordonnées compatibles avec les liaisons, à l'époque considérée, on devra avoir, pour tous ces déplacements virtuels, l'équation :

$$(1) \sum \left\{ \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z \right\} = 0.$$

Telle est l'équation générale cherchée; on peut encore l'écrire :

$$(2) \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma\, m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{dz^2}{dt^2}\delta z\right),$$

le Σ du premier membre s'étend à tous les points auxquels des forces sont appliquées; le Σ du second à tous les points en mouvement sans exception; s'il s'agissait d'un corps solide, ce second Σ constituerait à proprement parler une intégrale triple étendue à tout le corps.

Voyons comment on déduira de l'équation générale (1), dans chaque cas particulier, les équations du mouvement. Supposons le système formé de n points, entre les $3n$ coordonnées desquels existent p relations pouvant contenir le temps t :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \varphi_2(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_p(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots x_n, y_n, z_n) = 0, \end{array} \right.$$

le nombre p devra être au plus égal à $3n - 1$.

Les conditions (3) devant être satisfaites par le système dans sa position actuelle, et dans celle qui répond à un

déplacement quelconque, à la même époque, il faudra différentier ces équations (3) par rapport à x_1, y_1, z_1 ... sans faire varier le temps; on aura ainsi entre les $3n$ variables δx_1, δy_1, δz_1 ... δx_n, δy_n, δz_n, les p équations :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\varphi_1}{dy_1}\delta y_1 + \frac{d\varphi_1}{dz_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dz_n}\delta z_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_p}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\varphi_p}{dy_1}\delta y_1 + \frac{d\varphi_p}{dz_1}\delta z_1 + \ldots + \frac{d\varphi_p}{dz_n}\delta z_n = 0. \end{array}\right.$$

On pourra tirer de ces équations p variations en fonction des $3n - p$ autres qui seront entièrement arbitraires; on les portera dans l'équation (1), et on devra égaler à zéro les coefficients des $3n - p$ variations arbitraires; on trouvera ainsi $3n - p$ équations qui, jointes aux p équations (3), donneront un système de $3n$ équations, pour déterminer les $3n$ coordonnées en fonction du temps; parmi ces $3n$ équations, $3n - p$ seront des équations différentielles simultanées, du second ordre.

On peut opérer d'une manière plus symétrique. Soient λ_1, λ_2 ... λ_p, p facteurs indéterminés; multiplions les équations (4) respectivement par λ_1, λ_2 ... λ_p et ajoutons-les à l'équation (1); nous aurons :

$$(5)\quad \sum \left\{ X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_i} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx_i} + \ldots + \lambda_p \frac{d\varphi_p}{dx_i} \right\} \delta x_i = 0.$$

Profitons de l'indétermination des p multiplicateurs λ, pour annuler les coefficients des p variations qui, d'après (4), sont des fonctions connues des $3n - p$ variations restantes, lesquelles sont arbitraires; il faudra alors, dans l'équation (5), annuler les coefficients de ces $3n - p$ variations; donc, en somme, on doit égaler à zéro, dans l'équation (5), les coefficients de toutes les variations, et on trouve ainsi les $3n$ équations :

$$(6) \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dx_1} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dx_1} + \ldots + \lambda_p \dfrac{d\varphi_p}{dx_1}, \\ m_1 \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dy_1} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dy_1} + \ldots + \lambda_p \dfrac{d\varphi_p}{dy_1}, \\ m_1 \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dz_1} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dz_1} + \ldots + \lambda_p \dfrac{d\varphi_p}{dz_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n \dfrac{d^2z_n}{dt^2} = Z_n + \lambda_1 \dfrac{d\varphi_1}{dz_n} + \lambda_2 \dfrac{d\varphi_2}{dz_n} + \ldots + \lambda_p \dfrac{d\varphi_p}{dz_n}. \end{cases}$$

On a alors p équations (3), $3n$ équations différentielles (6) entre $3n + p$ inconnues, savoir, les $3n$ coordonnées et les p multiplicateurs λ. Le grand avantage que l'on trouve à opérer ainsi, c'est de mettre en évidence les forces produites par les liaisons du système ; ainsi :

$$\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \quad \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dy_1}, \quad \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dz_1}$$

sont les composantes de la force produite par la liaison $\varphi_1 = 0$ sur le point M_1; l'intensité de cette force est :

$$\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz_1}\right)^2};$$

la même liaison produit la force

$$\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{d\varphi_1}{dx_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dz_2}\right)^2}$$

appliquée au point M_2; la direction de la première de ces forces est celle de la normale à la surface qui aurait pour équation :

$$\varphi_1 (t, x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0,$$

en y regardant $t, x_2 \ldots z_n$ comme des constantes, x_1, y_1, z_1 étant seules variables.

Détermination des constantes. — On a p équations ordinaires, $3n-p$ équations différentielles du second ordre; on introduira donc par l'intégration $6n-2p$ constantes arbitraires; on aura $3n$ équations telles que la suivante :

$$x_i = f_i(t, C_1 \ldots C_{6n-2p}). \tag{7}$$

$3n-p$ seulement de ces équations sont distinctes, puisqu'on a les équations (3), qui ne contiennent pas de constantes; on en déduira, en prenant seulement $3n-p$ équations :

$$\frac{dx_i}{dt} = f'_i(t, C_1 \ldots C_{6n-2p}). \tag{8}$$

On aura ainsi $3n-p$ équations nouvelles; on fera dans les $3n-p$ équations (7), $t=0$, ainsi que dans les $3n-p$ équations (8); alors, $(x_i)_0$, $\left(\frac{dx'_i}{dt}\right)_0$ seront des quantités entièrement arbitraires. On aura donc $6n-2p$ équations propres à déterminer les $6n-2p$ constantes arbitraires C.

76. Exemple destiné à montrer l'interprétation mécanique des multiplicateurs indéterminés λ. — *Déterminer le mouvement de deux points matériels* M *et* M′ *de masses* m *et* m' *soumis à l'action de forces données, et réunis par une tige rigide et inflexible dont on néglige la masse, le point* M *étant assujetti à rester sur une surface fixe donnée* S *et le point* M′ *devant également rester sur une surface fixe donnée* S′.

Désignons par :

	x, y, z	les coordonnées de M,
	x', y', z'	— M′,
(1)	$f(x, y, z) = 0$	l'équation de la surface S,
(2)	$\varphi(x', y', z') = 0$	— S′,

On aura en outre, en désignant la longueur de la tige par l :

(3) $$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=l^2.$$

L'application du principe de d'Alembert, avec les multiplicateurs de Lagrange, λ pour l'équation (1), λ' pour (2), μ pour (3), nous donnera les équations suivantes, dans lesquelles X, Y, Z, X', Y', Z' désignent les composantes des forces appliquées respectivement aux points M et M' :

(4) $$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\frac{df}{dx}-\mu(x'-x),\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\frac{df}{dy}-\mu(y'-y),\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda\frac{df}{dz}-\mu(z'-z),\\ m'\frac{d^2x'}{dt^2}&=X'+\lambda'\frac{d\varphi}{dx'}+\mu(x'-x),\\ m'\frac{d^2y'}{dt^2}&=Y'+\lambda'\frac{d\varphi}{dy'}+\mu(y'-y),\\ m'\frac{d^2z'}{dt^2}&=Z'+\lambda'\frac{d\varphi}{dz'}+\mu(z'-z).\end{aligned}\right.$$

On aura les 9 équations (1), (2), (3) et (4) pour déterminer en fonction du temps les 9 quantités x, y, z, x', y', z', λ, λ', μ.

Traitons le problème autrement. En introduisant, pour le point M, la réaction normale MN = N de la surface S, et la tension MT = T de la tige; pour le point M', la réaction M'N' = N' de la surface S', et la tension M'T' = T, nous pourrons considérer isolément les mouvements des points M et M', et

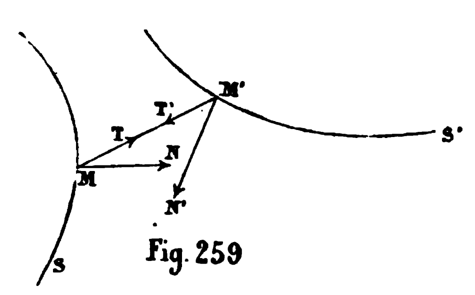


Fig. 259

nous aurons les équations suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{N\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}} + T\frac{x'-x}{l},$$

. . . .

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + \frac{N'\frac{d\varphi}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz'}\right)^2}} - T\frac{(x'-x)}{l},$$

. . . .

On voit que les deux systèmes d'équations sont les mêmes et que l'on a :

$$\lambda = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\lambda' = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz'}\right)^2}},$$

$$\mu = \frac{-T}{l}.$$

En général, en appliquant le principe de d'Alembert, avec les facteurs de Lagrange, on trouvera le même résultat qu'en introduisant d'avance les forces produites par les liaisons, et traitant les points du système isolément. Toutefois, avec le principe de d'Alembert, on n'a pas à démêler d'avance ces forces provenant des liaisons, le calcul les donne par les facteurs λ.

77. Théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes déduits de l'équation générale de la Dynamique. — Nous avons l'équation générale :

$$(1)\quad \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

qui a lieu pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, telles qu'elles existent à l'époque t.

Supposons que les liaisons permettent une translation parallèle à Ox; on aura pour ce déplacement virtuel :

$$\delta x = \delta x' = \delta x'' \dots = 0,$$
$$\delta y = \delta y' = \delta y'' \dots = 0,$$
$$\delta z = \delta z' = \delta z'' \dots = 0.$$

En supprimant dans l'équation (1) le facteur δx, on aura :

(2) $$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X.$$

De même, si les liaisons permettent des translations parallèles à Oy et Oz, on en déduira :

(3) $$\Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y,$$

(4) $$\Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z.$$

Nous retrouvons ainsi les équations (2), (3) et (4), qui conduisent au théorème sur le mouvement du centre de gravité; nous avions obtenu ces équations d'une autre manière, et sans aucune restriction, tandis que nous trouvons actuellement que ces équations n'ont lieu que si les liaisons permettent à tout instant des translations virtuelles du système parallèles aux axes coordonnées. Ainsi, supposons qu'un point M du système soit assujetti à une liaison qui le force à rester sur une courbe fixe C; il est évident que le point M ne peut pas prendre les translations indiquées; donc, les équations (2), (3), (4) n'ont pas lieu. Quand on opère comme nous l'avions fait auparavant, on doit considérer comme forces extérieures toutes celles qui ne s'exercent pas entre deux points du système en mouvement en étant égales et opposées; ainsi, par suite de la condition imposée au point M du système, il faut appliquer au point M

une force extérieure N représentant la réaction de la courbe; donc $\sum X$ devra être remplacé par $\sum X + N\cos(N, x)$; on aura donc l'équation :

$$(5) \qquad \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X + N\cos(N, x).$$

La composante $N\cos(N, x)$ n'est détruite par aucune autre force appliquée à un point du système en mouvement. Ainsi, dans notre ancienne manière de procéder, on voit que l'équation (2) n'a pas lieu, mais doit être remplacée par l'équation (5). Dans cette manière, la réaction N est une force extérieure; elle doit intervenir dans les expressions $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$; dans la nouvelle manière, c'est une force de liaison, et ces forces de liaison ne figurent pas dans l'équation générale (1).

Il en serait de même, si le système avait un point fixe, ou si un point du système devait rester constamment sur une surface donnée.

Si certains points du système sont seulement reliés deux à deux par des tiges rigides, cela n'empêchera pas les translations parallèles aux axes; les équations (2), (3), (4) auront lieu dans la nouvelle manière; elles auront lieu aussi dans l'ancienne, car les tensions étant deux à deux égales et opposées s'éliminent.

Supposons maintenant que les liaisons permettent un déplacement virtuel consistant en une rotation infiniment petite ω autour de Oz; on aura :

$$\delta z = 0, \quad \delta x = -y\,\delta\omega, \quad \delta y = +x\,\delta\omega,$$
$$\delta z' = 0, \quad \delta x' = -y'\,\delta\omega, \quad \delta y' = +x'\,\delta\omega,$$

$\delta\omega$ sera en facteur dans l'équation (1); en le supprimant, on aura :

$$(6) \qquad \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \sum (xY - yX).$$

Nous retrouvons ainsi les équations des moments; ces équations n'auront lieu que sous cette condition que les rotations du système autour des axes soient possibles; elles n'auraient pas lieu dans le cas considéré plus haut, où le point M devrait rester sur la courbe C; en appliquant l'ancienne démonstration qui n'était pas sujette à une semblable restriction, on aurait dû considérer la réaction N comme une force extérieure, et on aurait eu ainsi l'équation :

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY-yX)+\text{mom. de N relat. à } Oz,$$

mais non pas l'équation (6).

Dans le cas d'un système entièrement libre, dont les points sont soumis seulement à des liaisons mutuelles quelconques, et à des forces extérieures quelconques, on aura les trois équations du mouvement du centre de gravité et les trois équations des moments.

78. Théorème des forces vives. — Reprenons l'équation générale de la Dynamique :

$$(1)\quad \sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

Nous avons des liaisons exprimées par des équations entre les coordonnées, ces équations pouvant aussi contenir le temps; soit l'une d'elles :

$$(2)\qquad \varphi_1(t, x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y, z_n)=0;$$

les δ vérifient les équations :

$$(3)\qquad \frac{d\varphi_1}{dx_1}\delta x_1+\frac{d\varphi_1}{dy_1}\delta y_1+\ldots=0,$$

....

déduites des équations (2) sans faire varier le temps t, et

les d vérifient les équations :

$$(4) \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dx_1} dx_1 + \frac{d\varphi_1}{dy_1} dy_1 + \dots = 0,$$

....

de sorte que l'on n'aura pas :

$$\delta x_1 = dx_1; \quad \delta y_1 = dy_1 \dots$$

Parmi les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons à l'époque t, aucun ne pourra coïncider avec le déplacement réel qui a lieu entre l'époque t et l'époque $t + dt$. Donnons-en un exemple : un point M est relié à un point fixe O, par l'intermédiaire d'une tige qui se refroidit, dont la longueur varie par conséquent avec le temps; la liaison est exprimée par l'équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - f^2(t) = 0.$$

A l'époque t, tous les déplacements virtuels du point M ne peuvent s'effectuer que sur la sphère dont le centre est en O, ayant pour rayon $f(t)$; le déplacement réel, au contraire, fait passer le point M de cette sphère à la sphère qui a pour rayon $f(t + dt)$.

Ainsi donc, en général, on ne peut pas prendre les δ égaux aux d; mais il n'en est pas de même si les liaisons sont indépendantes du temps; les fonctions φ_1, φ_2 ... ne contiennent pas le temps explicitement; les équations de condition (3) et (4) sont les mêmes; on peut prendre les δ égaux aux d; parmi tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons à l'époque t, il en est un qui est identique au déplacement réel, entre les époques t et $t + dt$; considérons ce déplacement virtuel, pour lequel nous aurons :

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz,$$
$$\delta x' = dx' \dots$$

....

L'équation (1) donnera :

$$(5)\ \sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right);$$

or, on a :

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

d'où, en prenant dt constant :

$$d.\Sigma mv^2 = 2\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right);$$

en comparant à (5), il vient :

$$(6)\qquad d.\Sigma mv^2 = 2\sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Donc, *la différentielle de la somme des forces vives du système est égale au double de la somme des travaux élémentaires des forces extérieures ;* on en conclut :

$$(7)\qquad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\int_0^t \sum \left(\mathrm{X}\frac{dx}{dt} + \mathrm{Y}\frac{dy}{dt} + \mathrm{Z}\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Donc, dans tout système dont les liaisons sont indépendantes du temps, *l'accroissement de la somme des forces vives de tous les points du système est égal au double de la somme des travaux de toutes les forces extérieures pendant le même temps.*

C'est le principe des forces vives.

Nous avions déjà démontré ce théorème, et nous n'avions trouvé aucune restriction, tandis qu'ici il y en a une ; mais, dans notre ancienne démonstration, il fallait faire figurer dans les seconds membres des équations (6) et (7) toutes les forces, forces extérieures, et forces provenant des liaisons, telles que tensions de fils, réactions de courbes, de surfaces, etc. Dans notre nouvelle démonstration, toutes ces forces de liaison se trouvent éliminées, et il arrive

qu'elles ne le sont que lorsque les équations entre les coordonnées des divers points, ou les équations des liaisons, ne contiennent pas le temps explicitement.

Pour mieux comprendre que, pour que le théorème des forces vives ait lieu, il est indispensable que les équations des liaisons ne contiennent pas le temps explicitement, prenons les équations suivantes auxquelles conduit l'emploi des facteurs de Lagrange :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \dots + \lambda_p \frac{d\varphi_p}{dx_p},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous en conclurons :

$$\Sigma 2m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz\right) = 2\sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$
$$+ 2\lambda_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dx_1} dx_1 \dots\right) \dots + 2\lambda_p \left(\frac{d\varphi_p}{dx_p} dx_1 + \dots\right),$$

ou bien, en tenant compte des équations (4) :

$$(8) \qquad d.\Sigma mv^2 = 2\sum (Xdx + Ydy + Zdz) - 2\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dt} dt$$
$$- 2\lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dt} dt \dots - 2\lambda_p \frac{d\varphi_p}{dt} dt.$$

On voit que si la liaison φ_1 est indépendante du temps, les travaux des forces provenant de cette liaison sont nuls.

Supposons qu'il existe une fonction des forces, c'est à dire que l'on ait :

$$X_i = \frac{dF}{dx_i}, \quad Y_i = \frac{dF}{dy_i}, \quad Z_i = \frac{dF}{dz_i},$$

où :

$$F = F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n),$$

cette fonction F étant supposée indépendante du temps;

on aura :

$$\sum (X_i\, dx_i + Y_i\, dy_i + Z_i\, dz_i) = \frac{dF}{dx}\, dx \,... = dF$$

(ce qui ne serait pas vrai si F contenait le temps explicitement); il en résultera :

$$\Sigma mv^2 = 2F\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) + \text{const.}$$

On a, dans ce cas, l'intégrale des forces vives.

De la stabilité de l'équilibre.

79. Considérons un système de points matériels M, M', … de masses m, m', …, dont les coordonnées x, y, z; x', y', z', …. sont liées entre elles par un certain nombre d'équations ne contenant pas le temps explicitement, et supposons qu'il existe une fonction des forces $\psi\,(x, y, z, x', y', z', \ldots)$ également indépendante du temps, de manière que si on désigne par X, Y, Z les composantes de la force appliquée au point M, X', Y', Z' les composantes de la force appliquée au point M' …, on aura :

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{d\psi}{dx}, \quad Y = \dfrac{d\psi}{dy}, \quad Z = \dfrac{d\psi}{dz}, \\ X' = \dfrac{d\psi}{dx'} \cdots \end{cases}$$

Dans ces conditions, l'intégrale des forces vives a lieu, et l'on a pendant toute la durée du mouvement du système :

$$(2)\qquad \Sigma mv^2 = 2\psi\,(x, y, z, x', y', z' \ldots) + C.$$

Il existe en général des positions en nombre fini des points matériels, telles que ces points sont en équilibre sous l'action des forces données, lorsque leurs vitesses initiales sont nulles, et en tenant compte des liaisons; on

trouvera ces positions, comme on sait, par l'équation :

$$(3) \qquad \delta\psi = 0,$$

en ayant égard aux liaisons; de telle sorte que dans l'état d'équilibre, la fonction des forces sera généralement un maximum ou un minimum; nous allons démontrer que *si la fonction des forces est un maximum,* l'équilibre sera stable.

Démonstration de Lejeune-Dirichlet. — Supposons qu'on ait éliminé autant de variables qu'on le peut de la fonction des forces, au moyen des liaisons du système; soient α, β, γ ... celles qui restent; nous aurons, par l'intégrale des forces vives, et pendant le mouvement :

$$(4) \qquad \Sigma mv^2 = 2\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) + C.$$

Les valeurs de α, β, γ, ... qui répondent aux positions d'équilibre seront fournies par l'équation :

$$(5) \qquad \delta\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) = 0.$$

On peut toujours supposer que α, β, γ, ... soient nuls dans la position d'équilibre, car si α, β, γ, ... devenaient α', β', γ', ... dans cet état, on prendrait pour variables $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, ... en écrivant :

$$\alpha = \alpha' + (\alpha - \alpha') \ldots$$

Les nouvelles variables se réduiraient bien à zéro, dans l'état d'équilibre; on peut encore supposer que, dans cet état, la fonction ψ soit égale à zéro; car on peut toujours ajouter à la fonction ψ une constante C′, qui ne modifiera en rien ni les équations (1) ni l'équation (3), et on peut déterminer C′ par l'équation :

$$C' + \psi(0, 0, 0 \ldots) = 0.$$

Nous pouvons donc admettre que la fonction $\psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

est un maximum pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ... et que ce maximum est zéro, il en résultera que cette fonction sera négative, pour toutes les valeurs de α comprises entre $-\alpha_1$ et $+\alpha_2$, de β entre $-\beta_1$ et $+\beta_2$, ..., et qu'elle ne sera nulle dans ces intervalles que pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ..., α_1, β_1, ..., α_2, β_2, ... désignant des quantités suffisamment petites.

Supposons maintenant qu'on dérange un peu le système de sa position d'équilibre, de manière que α qui était nul devienne égal à α_0, β à β_0, ... et qu'en même temps on imprime aux points matériels du système certaines vitesses v_0, v'_0, ... très petites; l'équation (4) nous donnera, en déterminant la constante C :

$$\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = 2\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots),$$

ou bien :

$$\Sigma m v^2 = 2\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) + \left\{ \Sigma m v_0^2 - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots) \right\}, \tag{6}$$

et cette équation aura lieu pendant toute la durée du mouvement.

L'expression $\Sigma m v_0^2 - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots)$ est positive, car si α_0 est compris entre $-\alpha_1$ et $+\alpha_2$, de même pour β_0, γ_0, ..., l'expression $\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots)$ est négative.

Cela posé, dans l'expression $2\psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, supposons qu'une ou plusieurs des quantités α, β, ... deviennent égales à leurs limites $-\alpha_1$, $+\alpha_2$, $-\beta_1$, $+\beta_2$, ..., les autres étant quelconques; nous aurons, en faisant toutes les combinaisons, un nombre infini de valeurs de $2\psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, toutes négatives et différentes de zéro; il y en aura certainement une qui sera la plus petite en valeur absolue; soit K ce minimum absolu, ou plutôt une quantité un peu inférieure à ce minimum; on aura donc :

$$2\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) + K < 0, \tag{7}$$

quand une ou plusieurs des variables α, β, γ, ... atteindront leurs limites, $-\alpha_1$, $+\alpha_2$, ...

Supposons maintenant que nous ayons disposé des vitesses initiales v_0 de manière à avoir :

(8) $$\Sigma m v_0^2 - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots) < K,$$

ce qui imposera certaines limites à ces vitesses initiales; reportons-nous à l'équation (6); il sera impossible que l'une des quantités α, β, γ, ..., devienne égale à l'une de ces limites, car on déduirait alors de (7) et (8) :

$$2\psi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) + \Sigma m v_0^2 - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots) < 0,$$

et en se reportant à l'équation (6), on voit que $\Sigma m v_s$ serait négatif, ce qui est absurde.

Donc, pendant toute la durée du mouvement, aucune des quantités α, β, γ, ... ne pourra prendre une valeur égale à une de ses limites; donc α en vertu de la continuité restera toujours compris entre $-\alpha_1$ et $+\alpha_2$, β entre $-\beta_1$ et $+\beta_2$, ... Les limites entre lesquelles α, β, γ, ... doivent rester comprises, pourront être prises aussi petites qu'on le voudra.

La formule (6) montre que les vitesses v seront toujours comprises entre des limites déterminées, car on en déduit :

$$\Sigma m v^2 \leqq \Sigma m v_0^2 - 2\psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots),$$
$$\Sigma m v^2 \leqq K.$$

La stabilité est donc démontrée.

Application. — *Un point matériel pesant* M *est assujetti à rester sur un cercle situé dans un plan vertical; il est repoussé proportionnellement au carré de la distance par deux points* A *et* A' *situés sur le diamètre horizontal et à égale distance du centre. — Trouver la position d'équilibre.*

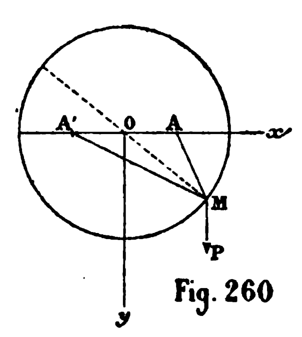


Fig. 260

Soient a le rayon du cercle, α la distance $OA = OA'$, x et y les

coordonnées du point M; on aura :

$$\overline{MA}^2 = r^2 = (x - \alpha)^2 + y^2,$$
$$\overline{MA'}^2 = r'^2 = (x + \alpha)^2 + y^2.$$

Ici l'on a, en désignant par μ la masse du point M, par m et m' celles des points A et A', et par f l'attraction de deux unités de masses à l'unité de distance :

$$U = f\frac{m\mu}{2}r^2 + f\frac{m'\mu}{2}r'^2 + \mu g y,$$
$$r^2 = \alpha^2 + a^2 - 2a\alpha\cos\theta,$$
$$r'^2 = \alpha^2 + a^2 + 2a\alpha\cos\theta,$$
$$y = a\sin\theta,$$

en désignant l'angle MOx par θ.

U est une fonction de θ, et on trouve aisément :

$$\frac{1}{\mu a}\frac{dU}{d\theta} = g\cos\theta - f\alpha(m' - m)\sin\theta,$$
$$\frac{1}{\mu a}\frac{d^2U}{d\theta^2} = -g\sin\theta - f\alpha(m' - m)\cos\theta.$$

En égalant $\frac{dU}{d\theta}$ à zéro comme on doit le faire pour obtenir la position d'équilibre, on trouve :

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{g}{f\alpha(m' - m)}.$$

Si θ_0 est le plus petit des angles correspondants à cette valeur de $tg\theta$, le problème aura deux solutions :

$$\theta = \theta_0, \quad \text{et} \quad \theta = \theta_0 + \pi.$$

On peut mettre l'expression de $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ sous la forme suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{\mu a}\frac{d^2U}{d\theta^2} = -g\sin\theta\left[1 + \frac{f^2\alpha^2(m' - m)^2}{g^2}\right].$$

On voit que pour $\theta = \theta_0$, on a $\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0$, et l'équilibre est stable.

Applications du principe de d'Alembert.

80. 1° *Mouvement de deux corps pesants* M *et* M′ *réunis par un cordon inextensible, et assujettis à rester sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale.* — Soient v la vitesse de M comptée positivement dans le sens OM, v' celle de M′ comptée positivement dans le sens OM′; les choses se passent comme si le corps M était sollicité par une force $mg \sin \alpha$ agissant dans le prolongement de OM, le corps M′ par une force $m'g \sin \alpha'$ agissant dans le prolongement de OM′. Nous aurons donc, en écrivant que les forces perdues se font équilibre :

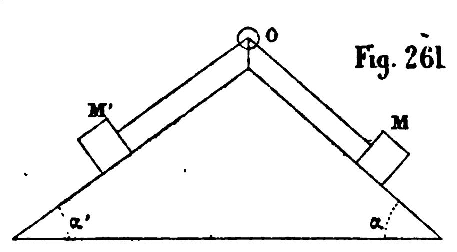


Fig. 261

$$mg \sin \alpha - m \frac{dv}{dt} = m'g \sin \alpha' - m' \frac{dv'}{dt}.$$

Or, on a évidemment :

$$v' = -v;$$

donc :

$$g(m \sin \alpha - m' \sin \alpha') = (m + m') \frac{dv}{dt},$$

d'où :

$$\frac{dv}{dt} = g \frac{m \sin \alpha - m' \sin \alpha'}{m + m'}.$$

Le mouvement est uniformément accéléré.

2° *Mouvement d'une chaîne homogène pesante, glissant sans frottement sur deux plans inclinés, et restant dans un plan perpendiculaire à leur intersection supposée horizontale.*

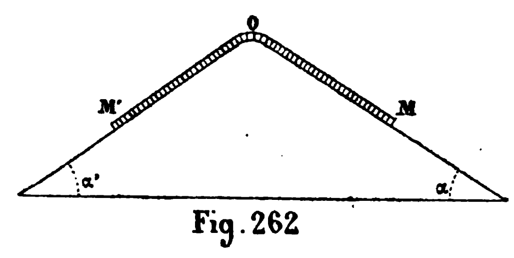


Fig. 262

Soient l la longueur de la chaîne, ρ la masse de l'unité de longueur. Posons :

$$\text{OM} = x, \quad \text{OM}' = x',$$
$$x + x' = l.$$

Chaque élément m de la partie OM est sollicité par la force $mg \sin \alpha$, chaque élément de la partie OM′ par la force $m'g \sin \alpha'$. On aura donc pour déterminer le mouvement de la chaîne l'équation :

$$\Sigma \left(mg \sin \alpha - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \Sigma \left(m'g \sin \alpha' - m' \frac{d^2x'}{dt^2} \right).$$

Le premier Σ s'étend à tous les points de la partie OM, le second à tous les points de OM′. Or on a :

$$\Sigma \left(mg \sin \alpha - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \left(g \sin \alpha - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \Sigma m$$
$$= \rho x \left(g \sin \alpha - \frac{d^2x}{dt^2} \right);$$

on aura donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \left(g \sin \alpha - \dfrac{d^2x}{dt^2} \right) = x' \left(g \sin \alpha' - \dfrac{d^2x'}{dt^2} \right); \\ x + x' = l, \end{array} \right.$$

soit deux équations pour déterminer x et x' ; on trouve, en éliminant x' :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{l} (\sin \alpha + \sin \alpha') \left(x - l \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'} \right),$$

on aura ensuite :

$$x' = l - x. \tag{2}$$

En posant :

$$n^2 = \frac{g}{l}(\sin\alpha + \sin\alpha'),$$

et désignant par A et B deux constantes arbitraires, on tire de (1) :

$$x = l\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'} + Ae^{nt} + Be^{-nt},$$

et (2) donnera ensuite :

$$x' = l\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\alpha'} - Ae^{nt} - Be^{-nt}.$$

Pour que la chaîne reste en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait :

$$A = 0, \quad B = 0.$$

On a alors :

$$OM = x_0 = \frac{l\sin\alpha'}{\sin\alpha + \sin\alpha'}; \quad OM' = x'_0 = \frac{l\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\alpha'},$$

d'où :

$$x_0 \sin\alpha = x'_0 \sin\alpha';$$

il en résulte que, dans la position d'équilibre, la droite MM' est horizontale.

3° *Une tige* OMM', *dont on néglige la masse, est mobile dans un plan* xOy *autour d'un de ses points* O *qui est fixe;* M *est un point matériel de masse* m *fixé à la tige,* M' *un petit anneau de masse* m' *qui peut glisser le long de la tige. Le point* M *est soumis à l'action d'une force* X, Y, *le point* M' *à l'action d'une force* X', Y'; *on demande de trouver le mouvement de la tige et celui du point* M'.

Désignons l'angle MOx par θ. Soient :

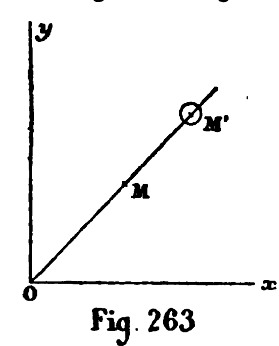


Fig. 263

x, y les coordonnées de M; $OM = a$,
x', y' — M'; $OM' = r'$.

On aura :

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \cos\theta, & y = a \sin\theta, \\ x' = r' \cos\theta, & y' = r' \sin\theta, \end{cases}$$

et pour déterminer le mouvement du système l'équation générale :

$$(A) \quad \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' + \left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y' = 0.$$

Les liaisons sont ici représentées par les équations :

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

On tire de (1) :

$$\delta x = -a \sin\theta\, \delta\theta; \quad \delta y = +a\cos\theta\,\delta\theta;$$
$$dx' = -z' \sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, \delta z',$$
$$dy' = +z' \cos\theta\, \delta\theta + \sin\theta\, \delta z',$$

ou bien :

$$\delta x = -y\,\delta\theta; \quad \delta y = +x\,\delta\theta,$$
$$\delta x' = -y'\,\delta\theta + \frac{x'}{r'}\delta r'; \quad \delta y' = +x'\,\delta\theta + \frac{y'}{r'}\delta r'.$$

Ces relations permettent de transformer l'équation (A) dans la suivante :

$$0 = \begin{aligned} &\delta\theta \left\{ x\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) - y\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) + x'\left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) - y'\left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\right\} \\ &+ \frac{\delta r'}{r'}\left\{ x'\left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\right) + y'\left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Les variations $\delta\theta$ et $\delta r'$ étant arbitraires, on doit égaler à zéro leurs coefficients; on obtient ainsi deux équations qui peuvent s'écrire comme il suit :

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\left\{ m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)\right\} = x\mathrm{Y} - y\mathrm{X} + x'\mathrm{Y}' - y'\mathrm{X}',$$

$$(3) \quad m'\left(x'\frac{d^2x'}{dt^2} + y'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = x'\mathrm{X}' + y'\mathrm{Y}'.$$

On pourrait faire diverses applications de ces formules; nous allons considérer le cas le plus simple, celui où il n'y a pas de forces extérieures. On a alors, en désignant par C une constante :

$$(4) \quad m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + m'\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = \mathrm{C},$$

$$x'\frac{d^2x'}{dt^2} + y'\frac{d^2y'}{dt^2} = 0;$$

cette dernière équation peut s'écrire :

$$(5) \quad \frac{d}{dt}\left(x'\frac{dx'}{dt} + y'\frac{dy'}{dt}\right) = \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2}.$$

En introduisant les coordonnées polaires dans les équations (4) et (5), il vient :

$$(6) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathrm{C}}{ma^2 + m'r'^2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(r'\frac{dr'}{dt}\right) = \frac{dr'^2 + r'^2\,d\theta^2}{dt^2},$$

ou :

$$(7) \quad \frac{d^2r'}{dt^2} = r'\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

(6) et (7) déterminent r' et θ en fonction du temps.

Nous désignerons par ω la valeur initiale de $\frac{d\theta}{dt}$, par a'

celle de r', enfin par $\omega a' K$ celle de $\frac{dr'}{dt}$; nous pourrons supposer que ω est positif; K pourra être positif ou négatif; on tirera de (6) et (7) :

$$(8) \qquad C = \omega(ma^2 + m'a'^2),$$

$$(9) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma^2 + m'r'^2},$$

$$\frac{d^2r'}{dt^2} = r'\omega^2 \frac{(ma^2 + m'a'^2)^2}{(ma^2 + m'r'^2)^2},$$

d'où :

$$m' d.\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = \omega^2 (ma^2 + m'a'^2)^2 \frac{d.(ma^2 + m'r'^2)}{(ma^2 + m'r'^2)^2}.$$

On en tire, en désignant par C′ une nouvelle arbitraire :

$$m'\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = C' - \frac{\omega^2 (ma^2 + m'a'^2)^2}{ma^2 + m'r'^2};$$

en appliquant à $t = 0$, on a :

$$m'\omega^2 a'^2 K^2 = C' - \omega^2 (ma^2 + m'a'^2),$$

d'où, en éliminant C′ :

$$m'\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = m'\omega^2 a'^2 K^2 + \omega^2 (ma^2 + m'a'^2)\left\{1 - \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma^2 + m'r'^2}\right\}.$$

$$\left(\frac{dr'}{dt}\right)^2 = \omega^2 \left\{K^2 a'^2 + \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma^2 + m'r'^2}(r'^2 - a'^2)\right\},$$

$$(10) \qquad \omega dt = \pm \frac{\sqrt{ma^2 + m'r'^2}\, dr'}{\sqrt{r'^2\{ma^2 + (1 + K^2)m'a'^2\} - a'^2\{(1 - K^2)ma^2 + m'a'^2\}}}.$$

(9) donne ensuite :

$$(11) \qquad d\theta = \pm \frac{(ma^2 + m'a'^2)\, dr'}{\sqrt{ma^2 + m'r'^2}\sqrt{r'^2\{ma^2 + (1 + K^2)m'a'^2\} - a'^2\{(1 - K^2)ma^2 + m'a'^2\}}}.$$

(10) fera connaître r' en fonction de t; (11) donnera r' en fonction de θ, ou l'équation de la trajectoire du point M′.

Discussion. — 1° $K > 0$; pour $t = 0$, r' commence à croître; dans les formules (10) et (11), on devra prendre d'abord le signe $+$; pour $r' = a'$, la quantité placée sous le radical commun aux deux formules est positive; cette quantité croît avec r'; donc, elle est toujours positive; ainsi, ce radical ne s'annule jamais, et r' croît de a' à $+\infty$; t croît indéfiniment; θ tend vers une limite finie, il y a une asymptote (car on trouve que $r'^2 \frac{d\theta}{dr'}$ a aussi une limite finie).

2° $K < 0$ — r' commence à décroître, à partir de $r' = a'$; supposons d'abord :

$$(1 - K^2)\, ma^2 + m'a'^2 > 0,$$

et faisons :

$$r''^2 = \frac{a'^2 (1 - K^2)\, ma^2 + m'a'^2}{ma^2 + (1 + K^2)\, m'a'^2};$$

on aura $r''^2 < a'^2$, comme on le voit aisément, soit par le calcul, soit en remarquant que le radical doit être réel. On pourra écrire :

$$\omega dt = \frac{-1}{\sqrt{ma^2 + (1 + K^2)\, m'a'^2}} \frac{\sqrt{ma^2 + m'r'^2}\, dr'}{\sqrt{r'^2 - r''^2}}.$$

Donc, r' décroîtra jusqu'à r'', pour croître ensuite de r'' à $+\infty$; il y aura encore une asymptote; le mobile M' n'atteindra pas le point O.

Si l'on a $(1 - K^2)\, ma^2 + m'a'^2 < 0$, r' décroîtra de a' à $-\infty$; il y aura encore une asymptote.

Les formules (10) et (11) se simplifient un peu pour $K = 0$. On peut intégrer lorsque l'on a $(1 - K^2)\, ma^2 + m'a'^2 = 0$; on en tire :

$$K^2 = \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma^2},$$

$$ma^2 + (1 + K^2)\, m'a'^2 = \frac{(ma^2 + m'a'^2)^2}{ma^2},$$

ce qui permet de mettre les équations (10) et (11) sous la forme suivante :

$$\omega dt = \frac{a\sqrt{m}}{ma^2 + m'a'^2}\sqrt{ma^2 + m'r'^2}\,\frac{dr'}{r'},$$

$$d\theta = a\sqrt{m}\,\frac{dr'}{r'\sqrt{ma^2 + m'r'^2}}.$$

On achèvera aisément l'intégration. On peut écrire :

$$d\theta = a\sqrt{m}\,\frac{dr'}{r'^2\sqrt{m' + \left(\frac{a\sqrt{m}}{r'}\right)^2}} = \frac{-d.\,\frac{a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m'}}\right)^2}},$$

et par conséquent :

$$\theta_0 - \theta = \log\left\{\frac{a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m'}} + \sqrt{1 + \frac{ma^2}{m'r'^2}}\right\},$$

$$\frac{a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m'}} + \sqrt{1 + \frac{ma^2}{m'r'^2}} = e^{-\theta + \theta_0}.$$

On déterminera θ_0 en écrivant que, pour $\theta = 0$, $r' = a$; on tire de l'équation précédente :

$$\frac{-a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m'}} + \sqrt{1 + \frac{ma^2}{m'r'^2}} = e^{\theta - \theta_0}.$$

On aura donc :

$$\frac{2a\sqrt{m}}{r'\sqrt{m'}} = e^{\theta_0 - \theta} - e^{\theta - \theta_0},$$

$$r' = \frac{a\sqrt{\frac{m'}{m}}}{\frac{(e^{\theta_0 - \theta} - e^{\theta - \theta_0})}{2}},$$

équation d'une spirale.

4° *Une tige* OA *dont on néglige la masse, est mobile dans un plan* xOy, *autour d'un de ses points* O, *lequel est fixe; cette tige porte p petits anneaux* M_1, M_2, ..., M_n *qui peuvent glisser le long de la tige; ces anneaux sont sollicités par des forces données, situées dans le plan* xOy; *on demande de déterminer le mouvement de chacun des anneaux, et le mouvement de rotation de la tige.*

Désignons par x_i et y_i les coordonnées du point M_i, et posons :

$$OM_i = r_i, \quad AOx = \theta,$$

m_i est la masse de l'anneau M_i; X_i, Y_i les composantes de la force directement appliquée à cet anneau.

En ayant recours à l'équation générale de la Dynamique, on aura pour déterminer le mouvement du système, l'équation :

$$(1) \qquad \sum\left[\left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i\right] = 0.$$

Or on a :

$$(2) \qquad x_i = r_i\cos\theta; \quad y_i = r_i\sin\theta,$$

θ désignant l'angle de la direction OA avec l'axe des x.

D'où :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \delta x_i &= -y_i\,\delta\theta + \frac{x_i}{r_i}\delta r_i,\\ \delta y_i &= +x_i\,\delta\theta + \frac{y_i}{r_i}\delta r_i.\end{aligned}\right.$$

Les $p+1$ variations $\delta\theta$ et δr_1, ..., δr_p étant arbitraires, on devra égaler à zéro leurs coefficients dans l'équation que l'on obtient en substituant dans (1) les expressions (3); on trouve ainsi :

$$(4) \qquad \Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2y_i}{dt^2} - y_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right) = \Sigma\,(x_iY_i - y_iX_i),$$

$$(5) \qquad m_i\left(x\frac{d^2x_i}{dt^2} + y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = x_iX_i + y_iY_i;$$

l'équation (4) et les p équations que l'on déduit de (5), en attribuant à l'indice i les valeurs 1, 2, ..., p, forment un ensemble de $p+1$ équations différentielles, pour déterminer les $p+1$ variables z_1, z_2, ..., z_p et θ, liées aux variables x_i et y_i par les équations (2).

Cas où les forces extérieures sont nulles. — Les équations (4) et (5) donnent :

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) = 0; \tag{6}$$

$$x_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0. \tag{7}$$

(6) donne, en intégrant et désignant par C la constante arbitraire :

$$\Sigma m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = C,$$

ou bien, en introduisant les coordonnées polaires :

$$\frac{d\theta}{dt} \Sigma m_i r_i^2 = C,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\Sigma m_i r_i^2}. \tag{8}$$

(7) peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \frac{dx_i^2 + dy_i^2}{dt^2},$$

ou bien :

$$\frac{d}{dt} \left(r_i \frac{dr_i}{dt} \right) = \frac{dr_i^2 + r_i^2 \, d\theta^2}{dt^2},$$

d'où :

$$r_i \frac{d^2 . r_i}{dt^2} = r_i^2 \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur (8) :

$$\frac{d^2 . r_i}{dt^2} = \frac{C^2}{(\Sigma m_i r_i^2)^2} r_i.$$

Le problème est donc ramené à l'intégration du système suivant de $p+1$ équations différentielles simultanées :

(8) $$\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{\Sigma m_i r_i^2},$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2.r_1}{dt^2}=\dfrac{C^2}{(\Sigma m_i r_i^2)^2}r_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^2.r_p}{dt^2}=\dfrac{C^2}{(\Sigma m_i r_i^2)^2}r_p. \end{array}\right.$$

Posons, d'une manière générale :

(9) $$r_i\sqrt{m_i}=u_i,$$

et les équations ci-dessus deviendront :

(10) $$\frac{d\theta}{dt}=\frac{C}{\Sigma u_i^2},$$

(11) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u_1}{dt^2}=\dfrac{C^2}{(\Sigma u_i^2)^2}u_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^2u_p}{dt^2}=\dfrac{C^2}{(\Sigma u_i^2)^2}u_p. \end{array}\right.$$

En multipliant les équations (11) respectivement par $2du_1$, $2du_2$, ..., $2du_p$, et faisant la somme, on trouve :

$$d.\Sigma\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2=\frac{C^2}{(\Sigma u_i^2)^2}d.\Sigma u_i^2,$$

d'où, en intégrant et désignant par C'^2 une constante arbitraire :

(12) $$\Sigma\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2=C'^2-\frac{C^2}{\Sigma u_i^2}.$$

On a ensuite, en multipliant la première des équations (11) par $-u_2$, la seconde par u_1, et ajoutant :

$$u_1\frac{d^2u_2}{dt^2}-u_2\frac{d^2u_1}{dt^2}=0;$$

on aura d'une manière générale, en désignant par i et j deux nombres entiers positifs différents, au plus égaux à p :

$$u_i \frac{d^2 u_j}{dt^2} - u_j \frac{d^2 u_i}{dt^2} = 0,$$

d'où, en multipliant par dt et intégrant :

$$u_i \frac{du_j}{dt} - u_j \frac{du_i}{dt} = \text{constante}.$$

On en conclut, en désignant par n une constante arbitraire :

$$\Sigma \left(u_i \frac{du_j}{dt} - u_j \frac{du_i}{dt}\right)^2 = C^2 n^2,$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$\Sigma u_i^2 \, \Sigma \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 - \Sigma \left(u_i \frac{du_i}{dt}\right)^2 = C^2 n^2,$$

ou bien :

(13) $$\Sigma u_i^2 \, \Sigma \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{d.\Sigma u_i^2}{dt}\right)^2 = C^2 n^2.$$

Posons pour abréger :

(14) $$\Sigma u_i^2 = \rho^2;$$

les équations (12) et (13) donneront :

$$\Sigma \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 = C'^2 - \frac{C^2}{\rho^2},$$

$$\rho^2 \, \Sigma \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = C^2 n^2,$$

d'où, en éliminant $\Sigma \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2$:

(15) $$\rho^2 C'^2 - C^2 - \rho^2 \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = C^2 n^2,$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{C'^2 \rho^2 - C^2 (1 + n^2)},$$

$$dt = \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{C'^2 \rho^2 - C^2 (1 + n^2)}}.$$

On en tire, en intégrant et désignant par τ une constante arbitraire :

$$C'^2 (t + \tau) = \sqrt{C'^2 \rho^2 - C^2 (1 + n^2)},$$

(16) $$C'^2 \rho^2 = C^2 (1 + n^2) + C'^4 (t + \tau)^2.$$

On tire de (15) :

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = C'^2 - \frac{C^2 (1 + n^2)}{\rho^2},$$

d'où, en différentiant et supprimant le facteur $2\frac{d\rho}{dt}$:

(17) $$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{C^2 (1 + n^2)}{\rho^3}.$$

L'équation (10) donne, en ayant égard à (14) :

(18) $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{\rho^2},$$

et la première des équations (11) devient :

(19) $$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{C^2}{\rho^4} u_1.$$

On déduit de (17) et (19) la combinaison suivante :

$$\rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} - u_1 \frac{d^2 \rho}{dt^2} = - C^2 n^2 \frac{u_1}{\rho^3};$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \cdot \left\{ \rho^2 \frac{d.\frac{u_1}{\rho}}{dt} \right\} = - C^2 n^2 \frac{u_1}{\rho^3},$$

ou encore :

$$\frac{\rho^2}{C} \frac{d}{dt} \cdot \left\{ \frac{\rho^2}{C} \frac{d.\frac{u_1}{\rho}}{dt} \right\} = - n^2 \frac{u_1}{\rho};$$

cette équation devient, en tenant compte de (18) :

$$\frac{d}{d\theta} \cdot \left\{ \frac{d.\frac{u_1}{\rho}}{d\theta} \right\} = - n^2 \frac{u_1}{\rho};$$

ou bien, en prenant θ pour variable indépendante :

$$\frac{d^2 \frac{u_1}{\rho}}{d\theta^2} + n^2 \frac{u_1}{\rho} = 0.$$

On en déduit, en désignant par a_1 et b_1 deux constantes arbitraires :

$$\frac{u_1}{\rho} = a_1 \cos n\theta + b_1 \sin n\theta.$$

On aura des formules analogues pour $\frac{u_2}{\rho}, \ldots, \frac{u_n}{\rho}$.

Voici l'ensemble de ces formules :

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{u_1}{\rho} = a_1 \cos n\theta + b_1 \sin n\theta, \\ \frac{u_2}{\rho} = a_2 \cos n\theta + b_2 \sin n\theta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{u_p}{\rho} = a_p \cos n\theta + b_p \sin n\theta, \end{cases}$$

$$(21) \quad \rho^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2.$$

On déduit des équations (20), en tenant compte de (21) :

$$1 = (a_1^2 + \ldots + a_p^2) \cos^2 n\theta + (b_1^2 + \ldots + b_p^2) \sin^2 n\theta$$
$$+ 2 (a_1 b_1 + \ldots + a_p b_p) \cos n\theta \sin n\theta;$$

cette équation devant avoir lieu quel que soit θ, il en résulte les trois relations suivantes entre les $2p$ constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$:

$$(22) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_p^2 = 1, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p = 0. \end{cases}$$

L'équation (16) détermine ρ en fonction de t; les équations (20) donneront $u_1, u_2, \ldots, u_p$, et par suite, $r_1, r_2, \ldots, r_p$, en fonction de t, pourvu que θ soit connu en fonction de t;

or, on tire de (16) et (18) :

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{CC'^2}{C'^4(t+\tau)^2+C^2(1+n^2)},$$

d'où, en désignant par h une constante arbitraire :

$$(23)\qquad \theta+h=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\text{ arc tang. }\left[\frac{C'^2(t+\tau)}{C\sqrt{1+n^2}}\right].$$

Voici donc l'ensemble des formules qui résolvent le problème :

$$(a)\qquad \rho=\sqrt{C'^2(t+\tau)^2+\frac{C^2(t+n^2)}{C'^2}},$$

$$(b)\qquad \theta+h=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\text{ arc tang. }\left[\frac{C'^2(t+\tau)}{C\sqrt{1+n^2}}\right],$$

$$(c)\qquad \left\{\begin{array}{l} r_1=\dfrac{\rho}{\sqrt{m_1}}(a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta),\\ r_2=\dfrac{\rho}{\sqrt{m_2}}(a_2\cos n\theta+b_2\sin n\theta),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ r_p=\dfrac{\rho}{\sqrt{m_p}}(a_p\cos n\theta+b_p\sin n\theta).\end{array}\right.$$

Ces équations déterminent les inconnues en fonction du temps t, et des $2p+5$ constantes arbitraires, $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $b_1, b_2, \ldots, b_p$, C, C', n, τ, h qui se réduisent à $2p+2$, à cause des relations (22).

On déduit aisément de (a), (b) et de la première équation (c), par l'élimination de ρ et t, la relation suivante :

$$(d)\qquad r_1=\frac{C\sqrt{1+n^2}}{C'\sqrt{m_1}}\,\frac{a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta}{\cos\left[(\theta+h)\sqrt{1+n^2}\right]},$$

c'est l'équation de la trajectoire du point M_1.

Remarque. — Le procédé que nous avons suivi pour l'intégration des équations (11) est emprunté à un Mémoire intéressant de Binet, *Journal de Liouville*, t. II, p. 457.

CHAPITRE IX

ÉQUATIONS DE LAGRANGE. — ÉQUATIONS CANONIQUES.

81. Considérons un système de points matériels, dont les coordonnées rectangulaires soient désignées par x, y, z; $x_1, y_1, z_1, \ldots$; X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1, ... désignant les composantes des forces appliquées à ces divers points; on aura par le principe de d'Alembert cette équation générale :

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

ou bien :

$$(1) \quad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

et cette équation, combinée avec celles qui proviennent des liaisons du système, donnera tout ce qu'il faut pour déterminer le mouvement de ce système.

Supposons que, en tenant compte des liaisons, $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ puissent s'exprimer à l'aide de k variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et du temps t:

$$(2) \quad \left\{\begin{array}{ll} x = f(q_1, q_2, \ldots, q_k, t); & x_1 = f_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \ldots \\ y = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t); & y_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \ldots \\ z = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_k, t); & z_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \ldots \end{array}\right.$$

Lagrange a donné une formule remarquable qui permet de transformer d'une manière très simple l'équation (1), en y introduisant les variables q au lieu des variables x, y, z.

La transformation du premier membre de cette équation s'effectue immédiatement; on aura en effet :

(3) $$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k;$$

en remplaçant δx par

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k,$$

δy, δz, ... par des expressions analogues, en égalant dans les deux membres de l'équation (3) les coefficients de δq_α, il viendra :

$$Q_\alpha = X\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + Y\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + Z\frac{\partial z}{\partial q_\alpha} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial q_\alpha} + \ldots,$$

ou simplement :

(3bis) $$Q_\alpha = \sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + Y\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + Z\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right).$$

On devra remplacer en même temps, dans le second membre de cette équation (3bis), les quantités X, Y, Z, ..., qui sont des fonctions de t, x, y, z, ..., par leurs valeurs en fonction de q_1, q_2, ..., q_k et t. Supposons de même qu'après avoir fait le changement de variables indiqué, le second membre de l'équation (1) devienne :

(4) $$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = u_1\delta q_1 + u_2\delta q_2 \ldots + u_k\delta q_k$$

toute la question est de déterminer les quantités u_1, u_2, ..., u_k. On aura, en procédant comme ci-dessus :

(5) $$u_\alpha = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{dq_\alpha}\right),$$

ce que l'on peut écrire :

$$\left\{\begin{aligned} u_\alpha = \Sigma m \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right\} \\ - \Sigma m\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Posons pour abréger :

(6) $$\xi_\alpha = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} \right),$$

et nous aurons :

(7) $$u_\alpha = \frac{d\xi_\alpha}{dt} - \Sigma m \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_\alpha} \right\};$$

or, on a :

$$x = f(q_1, q_2, \ldots t),$$

d'où, successivement :

(8) $$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt},$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \, \partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \, \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \, \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \, \partial q_k} \frac{dq_k}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right\},$$

la parenthèse est égale d'après (8) à $\frac{dx}{dt}$; on aura donc :

(9) $$\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dx}{dt},$$

et l'équation (8) devient :

$$u_\alpha = \frac{d.\xi_\alpha}{dt} - \Sigma m \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{dx}{dt} + \ldots \right\}.$$

Désignons par 2T la force vive du système, et posons :

$$\frac{dx}{dt} = x'; \quad \frac{dy}{dt} = y'; \quad \frac{dz}{dt} = z';$$

nous aurons :

(10) $$2T = \Sigma m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\} = \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Cette quantité 2T, lorsqu'on y remplacera $\frac{dx}{dt} = x'$ par sa valeur (8), y', z', ... par leurs valeurs analogues, deviendra une certaine fonction de t, q_1, q_2, ..., q_k et de $q'_1 = \frac{dq_1}{dt}$, $q'_2 = \frac{dq_2}{dt}$, ... $q'_k = \frac{dq_k}{dt}$.

Cherchons les dérivées partielles de cette fonction par rapport à l'une quelconque des variables q ou q'; nous aurons d'abord :

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Sigma m \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{dz}{dt} \right\}.$$

En comparant avec (7) et (9), on en conclut :

$$u_\alpha = \frac{d.\xi_\alpha}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}. \tag{11}$$

L'équation (8) peut s'écrire :

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial q_i} q'_i = \frac{\partial x}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial q_i} q'_i; \tag{8 bis}$$

on en conclut :

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x}{\partial q_\alpha}.$$

(6) donne alors :

$$\xi_\alpha = \Sigma m \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha} \right),$$

ou bien :

$$\xi_\alpha = \Sigma m \left\{ x' \frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha} \right\},$$

ou bien, en vertu de (10) :

$$\xi_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}.$$

L'équation (11) donnera donc :

$$u_\alpha = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.$$

En tenant compte de (3) et (4), l'équation (1) pouvait s'écrire :

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_k\,\delta q_k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} u_\alpha\, dq_\alpha;$$

en remplaçant u_α par sa valeur ci-dessus, il viendra donc :

$$(12)\qquad Q_1\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 \ldots + Q_k\,\delta q_k = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=k} \delta q_\alpha \left[\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right].$$

Telle est la transformée de l'équation générale de la Dynamique.

Supposons que les liaisons entre les n points du système établissent entre les $3n$ coordonnées x, y, z, ..., $3n - k$ équations de condition; on pourra alors exprimer ces $3n$ coordonnées à l'aide du temps, et de k variables *indépendantes* les unes des autres, que nous supposerons être q_1, q_2, ..., q_k; alors, dans l'équation (12), les k variations δq_1, δq, ..., δq_k sont arbitraires, et cette équation se décompose dans les k suivantes :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_k} - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \end{array}\right.$$

Ce sont là les équations de Lagrange.

Après avoir calculé $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$, pour former ces équations, on devra y remettre, au lieu des q', les $\frac{dq}{dt}$; donc, les équations (13) seront k équations différentielles simultanées du second ordre pour déterminer les k quantités q en fonction de t et de $2k$ constantes arbitraires.

En nous plaçant dans les mêmes conditions, supposons qu'il existe une fonction des forces U, contenant le temps t, et les coordonnées x, y, z, x_1, y_1, z_1, ..., de sorte que :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$
$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

alors, la formule (3bis) donnera :

$$Q_\alpha = \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha},$$

et les équations (13) pourront s'écrire :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}. \end{array} \right.$$

Ainsi, dans ce cas qui est le plus fréquent, voici la marche à suivre : la première chose à faire est de déterminer, dans chaque cas particulier, les k variables indépendantes q_1, q_2, ..., à l'aide desquelles on peut exprimer toutes les coordonnées x, y, z, x_1, y_1, z_1, ..., au moyen des équations qui expriment les liaisons ; on obtiendra ainsi les équations (2). Il y a ensuite à considérer les deux fonctions T et U :

$$2T = \Sigma m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$
$$U = \chi\,(x, y, z, x_1, y_1, z_1 \ldots),$$

à l'aide de l'équation (8bis) et des équations analogues déduites de (2), on exprimera T en fonction de t, q_1, q_2, ..., q_k; q'_1, q'_2, ..., q'_k; on peut remarquer en passant que

les variables q' n'entreront dans T qu'au second degré; U deviendra de même une fonction connue de t, q_1, q_2, ..., q_k; on pourra former alors les équations (14), d'où dépendront les valeurs des variables q_1, q_2, ..., q_k en fonction du temps; c'est un système de k équations différentielles simultanées du second ordre.

On peut se proposer de retrouver l'intégrale des forces vives, quand elle existe.

On déduit de (14) la combinaison suivante : en multipliant la première équation par $q'_1 dt = dq_1$; la seconde par $q'_2 dt = dq_2$, ...

$$\left\{ q'_1\, d.\frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2\, d.\frac{\partial T}{\partial q'_2} + \dots \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + \dots \right\} = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 + \dots,$$

ce que l'on peut écrire :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & d.\left\{ \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \dots \right\} \\ & - \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_1} dq'_1 \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} dq'_2 \dots \right) \right\} \\ & \qquad = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Supposons actuellement les liaisons primitives indépendantes du temps; alors, dans l'expression (8) de x' :

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial q_i} q'_i,$$

le terme en $\frac{\partial f}{\partial t}$ disparaît; les variables x', y', z', ..., sont des fonctions homogènes et du premier degré de $q'_1, q'_2, \dots, q'_k$;

$$2T = \Sigma m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

est une fonction homogène et du second degré des mêmes quantités, ne contenant pas le temps explicitement; donc,

on a, par une propriété connue des fonctions homogènes :

$$q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots = 2T,$$

la première partie du premier membre de l'équation (15) devient donc égale à $2dT$; la partie suivante

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_1} dq'_1\right) + \ldots$$

est égale à dT, puisque T ne contient pas le temps explicitement; l'équation (15) donne donc :

$$dT = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i.$$

Si la fonction U ne contient pas le temps explicitement, on a :

$$dU = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i;$$

il en résulte :

$$dT = dU,$$
$$T = U + \text{const.}$$

Remarque. — Supposons que les variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ n'aient pas été réduites au plus petit nombre possible; alors on aura entre ces variables h équations de condition :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1(q_1, q_2, \ldots q_k, t) = 0, \\ f_2(q_1, q_2, \ldots q_k, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(q_1, q_2, \ldots q_k, t) = 0, \end{array}\right.$$

h étant plus petit que k. D'où l'on déduira :

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial q_k}\delta q_k = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial q_k}\delta q_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_h}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial f_h}{\partial q_k}\delta q_k = 0. \end{array}\right.$$

Alors, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ des facteurs indéterminés, on déduira de (12) et (17), en opérant comme on l'a fait à l'occasion du principe de d'Alembert, les équations suivantes :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial q_1} \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial q_1}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial q_2} \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'_k} - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial q_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial q_k} \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial q_k}. \end{array}\right.$$

Les équations (16) et (18) forment un système de $k + h$ équations entre les $k + h$ inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, et le temps t; le problème est déterminé.

Application des équations de Lagrange.

82. 1° **Équation du mouvement d'un point matériel dans un plan en coordonnées polaires.** — Soient r et θ les coordonnées polaires correspondantes aux coordonnées rectangulaires x et y. L'équation :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y\right) = X\,\delta x + Y\,\delta y,$$

se transforme comme il suit, en posant :

$$(1)\qquad X\,\delta x + Y\,\delta y = A\,\delta r + B\,\delta\theta,$$

$$(2)\qquad \delta r\left\{\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} - A\right\} + \delta\theta\left\{\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} - B\right\} = 0.$$

On a :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$2T = mv^2 = m\left\{\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}\right\} = m\,(r'^2 + r^2\theta'^2),$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dT}{dr'} = mr' = m\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dT}{dr} = mr\theta'^2 = mr\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

$$\frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta' = mr^2\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0.$$

Il faut maintenant déterminer A et B; décomposons la force P appliquée au point M en deux autres, l'une ME = R dirigée suivant le rayon vecteur, et regardée comme positive quand elle agit suivant le prolongement de ce rayon, l'autre MF = N, perpendiculaire au rayon vecteur, et regardée comme positive, quand elle tend à augmenter θ; $X\,\delta x + Y\,\delta y$ est le moment virtuel de la force P; ce moment est égal à la somme des moments de R et N; le moment de R est $R \times MH = R\delta r$; celui de N est $N \times HM' = Nr\delta\theta$; on a donc :

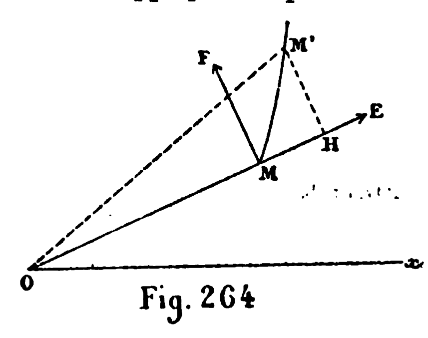


Fig. 264

$$X\,\delta x + Y\,\delta y = R\,\delta r + Nr\,\delta\theta,$$

il en résulte :

$$A = R, \quad B = Nr,$$

on trouve ainsi que l'équation (2) devient :

$$(3)\quad \delta r \left\{ m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) - R \right\} + \delta\theta \left\{ m\frac{d}{dt}\cdot r^2\frac{d\theta}{dt} - Nr \right\} = 0.$$

Si le point est entièrement libre, δr et $\delta\theta$ sont arbitraires;

l'équation précédente donne :

$$(4)\qquad \begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}\right) = \mathrm{R}, \\ m\dfrac{d}{dt}\cdot r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \mathrm{N}r. \end{cases}$$

Si le point M est assujetti à rester sur une courbe donnée :

$$(5)\qquad f(r, \theta) = 0.$$

On déduira de (3) et (4) :

$$(6)\qquad \begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}\right) = \mathrm{R} + \lambda\dfrac{df}{dr}, \\ m\dfrac{d}{dt}\cdot r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \mathrm{N}r + \lambda\dfrac{df}{d\theta}. \end{cases}$$

Les équations (5) et (6) déterminent r, θ et λ. Dans le cas où il existe une fonction des forces :

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}; \quad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{U}}{dy},$$

$$\mathrm{X}\delta x + \mathrm{Y}\delta y = \delta\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{U}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\delta y = \frac{d\mathrm{U}}{dr}\delta r + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\delta\theta,$$

$$\mathrm{A} = \frac{d\mathrm{U}}{dr}, \quad \mathrm{B} = \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}.$$

On aura, au lieu de (4) et (6), les équations suivantes :

$$(4^{bis})\qquad \begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}\right) = \dfrac{d\mathrm{U}}{dr}, \\ m\dfrac{d}{dt}\cdot r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\theta}, \end{cases}$$

$$(6^{bis})\qquad \begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2}\right) = \dfrac{d\mathrm{U}}{dr} + \lambda\dfrac{df}{dr}, \\ m\dfrac{d}{dt}\cdot r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\theta} + \lambda\dfrac{df}{d\theta}. \end{cases}$$

Revenons aux formules (4); si la force P est toujours

dirigée vers l'origine, on aura constamment N = 0, et la deuxième équation (4) donnera :

$$\frac{d}{dt} \cdot r^2 \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

La loi des aires se présente ainsi d'elle-même.

2° **Équations du mouvement d'un point matériel dans l'espace, avec les coordonnées polaires** r, θ, ψ. — L'équation

$$(1) \quad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = X\,\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

aura pour transformée :

$$(2) \quad \delta r\left\{\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} - A\right\} + \delta\theta\left\{\frac{d}{dt}\cdot\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} - B\right\} + \delta\psi\left\{\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\psi'} - \frac{dT}{d\psi} - C\right\} = 0,$$

en posant :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = A dr + B\delta\theta + C\delta\psi.$$

En partant des formules :

$$x = r \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = r \sin\theta \sin\psi,$$
$$z = r \cos\theta,$$

on trouve aisément :

$$(3) \qquad 2T = m\,(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2\theta.\psi'^2).$$

On en conclut :

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dT}{dr'} = m\frac{dr}{dt}; \quad \frac{dT}{dr} = mr\left\{\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right\}, \\ &\frac{dT}{d\theta'} = mr^2\frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{dT}{d\theta} = mr^2 \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \\ &\frac{dT}{d\psi'} = mr^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}; \quad \frac{dT}{d\psi} = 0. \end{aligned}\right.$$

Décomposons la force P appliquée au point M en trois autres, ME = R agissant suivant le rayon vecteur, et considérée comme positive quand elle est dirigée dans le prolongement de ce rayon, MG = M agissant suivant la tangente au méridien, et regardée comme positive quand elle tend à augmenter θ; MF = N agissant suivant la tangente au parallèle, et regardée comme positive, quand elle tend à augmenter ψ. Donnons au point M le déplacement infiniment petit MM'; ses projections sur R, M et N, seront δr, $r\delta\theta$, $r \sin\theta\delta\psi$; $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$ sera égal à la somme des moments virtuels de R, M et N; on aura donc :

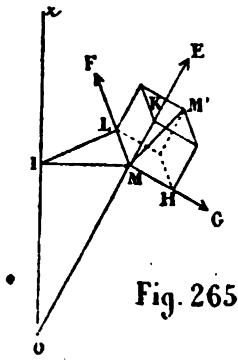


Fig. 265

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = R\delta r + Mr\delta\theta + Nr \sin\theta\,\delta\psi,$$

il en résulte :

$$A = R; \quad B = Mr; \quad C = Nr \sin\theta.$$

Si donc le point M est libre, l'équation (2) donnera, en tenant compte de (3) et (4) :

$$(4^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & m \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}\right) \right\} = R, \\ & m \left\{ \frac{d}{dt} r^2 \frac{d\theta}{dt} - r^2 \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right\} = Mr, \\ & m \frac{d}{dt} r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = Nr \sin\theta. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où il existe une fonction des forces U, il faudra remplacer les seconds membres des équations précédentes par

$$\frac{dU}{dr}, \quad \frac{dU}{d\theta}, \quad \frac{dU}{d\psi}.$$

Si le point était assujetti à rester sur une surface donnée :

$$f(r, \theta, \psi) = 0,$$

il faudrait ajouter aux seconds membres :

$$\lambda \frac{df}{dr}, \quad \lambda \frac{df}{d\theta}, \quad \lambda \frac{df}{d\psi}.$$

Si le point matériel devait rester sur la courbe définie par les deux équations :

$$f(r, \theta, \psi) = 0,$$
$$\varphi(r, \theta, \psi) = 0,$$

il faudrait ajouter aux seconds membres les quantités :

$$\lambda \frac{df}{dr} + \mu \frac{d\varphi}{dr}; \quad \lambda \frac{df}{d\theta} + \mu \frac{d\varphi}{d\theta}; \quad \lambda \frac{df}{d\psi} + \mu \frac{d\varphi}{d\psi}.$$

Application au pendule conique. — On a :

$$r = \text{const.} = l, \quad \delta r = 0;$$

l'équation (2) montre qu'on n'aura plus que les deux dernières équations (4bis); on a :

$$U = mgz = mgl \cos\theta,$$

$$\frac{dU}{d\theta} = -mgl \sin\theta; \quad \frac{dU}{d\psi} = 0.$$

Les deux équations indiquées donneront donc :

(5)
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta, \\ & \frac{d}{dt} \cdot \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où :

(6)
$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = C.$$

C'est l'équation que fournit le principe des aires, pour le plan horizontal.

Au lieu d'employer la seconde des équations (5), il vaudra mieux avoir recours à l'équation des forces vives :

$$T - U = \frac{1}{2} C',$$

qui est ici :

(7) $$ml^2 \left\{ \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right\} - 2mgl \cos\theta = C'.$$

On achèvera la solution en éliminant $\frac{d\psi}{dt}$ entre (6) et (7).

3° **Mouvement d'un point sur une surface fixe donnée.** — z pourra être considéré comme une fonction connue de x et y; plus généralement les variables x, y, z pourront être considérées comme des fonctions connues de deux variables u et v;

$$x = f(u, v); \quad y = \varphi(u, v); \quad z = \psi(u, v).$$

On aura :

$$V^2 = \left\{ \frac{df}{du}\frac{du}{dt} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dt} \right\}^2 + \dots,$$

et pour la force vive une expression de la forme :

$$2T = Au'^2 + 2Bu'v' + Cv'^2,$$

où A, B, C sont des fonctions connues de u et v; on en déduira :

$$\frac{dT}{du'} = A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{dT}{dv'} = B\frac{du}{dt} + C\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{dT}{du} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{dA}{du} + \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\frac{dB}{du} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \frac{dC}{du},$$
$$\frac{dT}{dv} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{dA}{dv} + \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\frac{dB}{dv} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \frac{dC}{dv}.$$

Si donc il existe une fonction des forces U, en la suppo-

sant exprimée au moyen des variables u et v, on aura pour déterminer le mouvement du point matériel les deux équations suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left(A\frac{du}{dt}+B\frac{dv}{dt}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dA}{du}-\ldots=\frac{dU}{du},$$
$$\frac{d}{dt}\left(B\frac{du}{dt}+C\frac{dv}{dt}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dA}{dv}-\ldots=\frac{dU}{dv}.$$

Il conviendra de remplacer l'une de ces équations par celle des forces vives :

$$A\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2B\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+C'\left(\frac{dv}{dt}\right)^2=2U+\text{const.}$$

Si la surface donnée est l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

On pourra faire :

$$x=a\sin u\cos v,$$
$$y=b\sin u\sin v,$$
$$z=c\cos u.$$

4° *On donne deux droites fixes* OA, OA_1; *trouver le mouvement de deux points matériels* M *et* M_1 *assujettis à rester constamment, le point* M *sur la droite* OA, M_1 *sur* OA_1; *ces deux points s'attirent proportionnellement à la distance.*

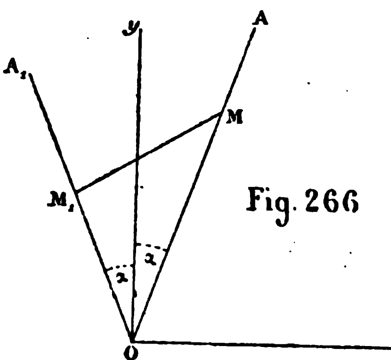


Fig. 266

Nous prendrons pour variables indépendantes :

$$OM=r,\quad OM_1=r_1.$$

Nous aurons, en désignant par m et m_1 les masses des deux

points M et M_1 :

(1)
$$2T = mr'^2 + m_1 r_1'^2,$$
$$U = -\frac{1}{2} fmm_1 \times \overline{MM_1}^2,$$

et à cause du triangle MOM_1 :

(2)
$$U = -\frac{fmm_1}{2}(r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos 2\alpha).$$

En tenant compte de (1) et (2), les formules de Lagrange donnent :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -fm_1 (r - r_1 \cos 2\alpha),$$
$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = -fm (r_1 - r \cos 2\alpha),$$

ou, en posant :

(3)
$$fm = h^2; \quad fm_1 = h_1^2,$$

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2 r}{dt^2} = -h_1^2 (r - r_1 \cos 2\alpha), \\ \dfrac{d^2 r_1}{dt^2} = -h^2 (r_1 - r \cos 2\alpha). \end{cases}$$

On a ainsi deux équations simultanées du second ordre, qui sont linéaires et à coefficients constants; on pose, pour les intégrer :

$$r = A \cos \nu t; \quad r_1 = \lambda A \cos \nu t,$$

où A, λ et ν désignent des constantes.

On trouve, en substituant dans (4) :

$$h_1^2 - \nu^2 = h_1^2 \lambda \cos 2\alpha,$$
$$\lambda (h^2 - \nu^2) = h^2 \cos 2\alpha,$$

d'où :

(5)
$$\lambda = \frac{h^2}{h^2 - \nu^2} \cos 2\alpha,$$

(6)
$$(h^2 - \nu^2)(h_1^2 - \nu^2) - h^2 h_1^2 \cos^2 2\alpha = 0.$$

On démontre aisément que cette équation (6), qui est du second degré en ν^2, a ses deux racines réelles et positives, ν^2 et ν'^2. Si on avait posé :

$$r = \mathrm{B} \sin \nu t, \qquad r_1 = \lambda\, \mathrm{B} \sin \nu t,$$

on aurait trouvé les mêmes équations (5) et (6). A chacune des racines de l'équation (6) répondra une valeur de λ, déterminée par (5), et une constante A, qui reste indéterminée. On aura donc, pour intégrales générales des équations (4) :

$$\left\{\begin{aligned} r &= \mathrm{A} \cos \nu t + \mathrm{B} \sin \nu t + \mathrm{A}' \cos \nu' t + \mathrm{B}' \sin \nu' t, \\ r_1 &= \frac{h^2}{h^2 - \nu^2} \cos 2\alpha\, (\mathrm{A} \cos \nu t + \mathrm{B} \sin \nu t) \\ &\qquad + \frac{h^2}{h^2 - \nu'^2} \cos 2\alpha\, (\mathrm{A}' \cos \nu' t + \mathrm{B}' \sin \nu' t); \end{aligned}\right.$$

A, B, A′, B′ sont quatre constantes arbitraires.

Si les vitesses initiales sont nulles, on aura $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dr'}{dt}\right)_0$; d'où, $\mathrm{B} = 0$, $\mathrm{B}' = 0$; si en outre $m = m_1$, il en résultera $h^2 = h_1^2$, et l'équation (6) deviendra :

$$(h^2 - \nu^2)^2 = h^4 \cos 2\alpha;$$

d'où :

$$h^2 - \nu^2 = \pm h^2 \cos^2 \alpha,$$

$$\nu^2 = 2h^2 \sin^2 \alpha; \qquad \nu'^2 = 2h^2 \cos^2 \alpha,$$

$$\frac{h^2 \cos 2\alpha}{h^2 - \nu^2} = 1; \qquad \frac{h^2 \cos 2\alpha}{h^2 - \nu'^2} = -1,$$

$$\left\{\begin{aligned} r &= \mathrm{A} \cos (h \sqrt{2}\, t \sin \alpha) + \mathrm{A}' \cos (h \sqrt{2}\, t \cos \alpha), \\ r' &= \mathrm{A} \cos (h \sqrt{2}\, t \sin \alpha) - \mathrm{A}' \cos (h \sqrt{2}\, t \cos \alpha), \end{aligned}\right.$$

avec :

$$\mathrm{A} = \frac{r^{(0)} + r_1^{(0)}}{2},$$

$$\mathrm{A}' = \frac{r^{(0)} - r_1^{(0)}}{2}.$$

5° *Un fil inextensible et sans masse est suspendu à un point fixe* O, *et chargé de deux points matériels pesants* M *et* M'; *on suppose qu'à l'origine du mouvement, ces points ont été écartés un peu de leurs positions d'équilibre, lesquelles se trouvent sur la verticale du point* O, *puis abandonnés à eux-mêmes, sans vitesse initiale; on propose de déterminer les petites oscillations du système.*

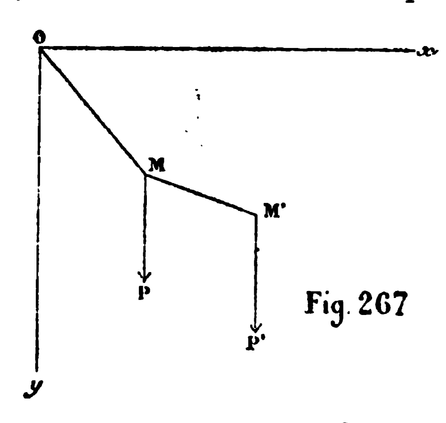


Fig. 267

Soient θ et φ les angles que font à l'époque t les portions rectilignes du fil OM et MM' avec la verticale Oy; OM $= a$, MM' $= b$; x, y, x', y' les coordonnées de M et M', v et v' les vitesses de ces points; on aura :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\sin\theta; & x' = a\sin\theta + b\sin\varphi, \\ y = a\cos\theta; & y' = a\cos\theta + b\cos\varphi, \end{cases}$$
$$P = mg; \qquad P' = m'g.$$

La fonction des forces U a pour expression :

$$U = mgy + m'gy',$$

ou, en remplaçant y et y' par leurs valeurs (1) :

$$(2)\qquad U = g\{(m + m')a\cos\theta + m'b\cos\varphi\};$$

on aura ensuite :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = a^2\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

$$v'^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2}{dt^2} = \left(a\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + b\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(a\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + b\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

$$v'^2 = a^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + b^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}.$$

On aura, pour la force vive :

$$2T = mv^2 + m'v'^2,$$

$$2T = (m + m')a^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + m'b^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2m'ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

ou, en posant

$$(3) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta'; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi' :$$

$$(4) \quad 2T = (m + m')a^2\theta'^2 + m'b^2\varphi'^2 + 2m'ab\cos(\varphi - \theta)\varphi'\theta'.$$

θ et φ sont les variables indépendantes.

Les équations du mouvement seront :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} &= \frac{dU}{d\theta}, \\ \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\varphi'} - \frac{dT}{d\varphi} &= \frac{dU}{d\varphi}, \end{aligned} \right.$$

T et U devant être remplacés par leurs valeurs (2) et (4). On trouve :

$$\frac{dT}{d\theta'} = (m + m')a^2\theta' + m'ab\cos(\varphi - \theta)\varphi' = (m + m')a^2\frac{d\theta}{dt} + m'ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\varphi'} = m'b^2\varphi' + m'ab\cos(\varphi - \theta)\theta' = m'b^2\frac{d\varphi}{dt} + m'ab\cos(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\theta} = m'ab\sin(\varphi - \theta)\varphi'\theta' = m'ab\sin(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dT}{d\varphi} = -m'ab\sin(\varphi - \theta)\varphi'\theta' = -m'ab\sin(\varphi - \theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dU}{d\theta} = -g(m + m')a\sin\theta,$$

$$\frac{dU}{d\varphi} = -gm'b\sin\varphi.$$

Les équations (5) vont donc devenir :

$$\frac{d}{dt}\left\{(m+m')a^2\frac{d\theta}{dt}+m'ab\cos(\varphi-\theta)\frac{d\varphi}{dt}\right\}$$
$$-m'ab\sin(\varphi-\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+g(m+m')a\sin\theta=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{m'b^2\frac{d\varphi}{dt}+m'ab\cos(\varphi-\theta)\frac{d\theta}{dt}\right\}$$
$$+m'ab\sin(\varphi-\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+gm'b\sin\varphi=0,$$

ou bien, après quelques réductions faciles :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2}+m'b\cos(\varphi-\theta)\frac{d^2\varphi}{dt^2}-m'b\sin(\varphi-\theta)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\\&\qquad\qquad+g(m+m')\sin\theta=0;\\&b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a\cos(\varphi-\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}+a\sin(\varphi-\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+g\sin\varphi=0.\end{aligned}\right.$$

A l'origine, φ et θ sont des quantités très petites, il en sera de même pendant tout le mouvement; $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ seront des quantités petites du même ordre; si l'on néglige le troisième ordre, les équations (6) deviendront simplement :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&(m+m')a\frac{d^2\theta}{dt^2}+m'b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g(m+m')\theta=0,\\&a\frac{d^2\theta}{dt^2}+b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+g\varphi=0.\end{aligned}\right.$$

Nous sommes donc ramenés à intégrer un système de deux équations linéaires simultanées du second ordre, à coefficients constants, et sans seconds membres.

Pour intégrer, on pose, en désignant par A, λ et r des constantes :

$$(8)\qquad \theta=A\cos rt;\qquad \varphi=\lambda A\sin rt,$$

En substituant dans (7), il vient :

$$(9)\qquad \begin{cases} (m+m')(g-ar^2) = m' b \lambda r^2, \\ (g-br^2)\lambda = ar^2; \end{cases}$$

A reste arbitraire; on tire de là :

$$(10)\qquad \lambda = \frac{ar^2}{g-br^2},$$

$$(m+m')(g-ar^2)(g-br^2) = m' abr^4,$$

ou bien :

$$(11)\qquad mabr^4 - g(a+b)(m+m')r^2 + (m+m')g^2 = 0.$$

Cette équation est du second degré en r^2; le critérium est :

$$g^2(a+b)^2(m+m')^2 - 4g^2 m(m+m')ab,$$

ou bien :

$$g^2(m+m')\{m(a-b)^2 + m'(a+b)^2\} > 0.$$

Donc, les deux racines de l'équation (11) sont réelles, et positives puisque leur somme et leur produit le sont; désignons-les par r^2 et r_1^2; on aura les solutions partielles suivantes des équations (7) :

$$\theta = \mathrm{A}\cos rt; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{A}ar^2}{g-br^2}\cos rt,$$

$$\theta = \mathrm{A}'\sin rt; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{A}'ar^2}{g-br^2}\sin rt,$$

$$\theta = \mathrm{A}_1\cos r_1 t; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{A}_1 ar_1^2}{g-br_1^2}\cos r_1 t,$$

$$\theta = \mathrm{A}_1'\sin r_1 t; \qquad \varphi = \frac{\mathrm{A}_1' ar_1^2}{g-br_1^2}\sin r_1 t,$$

A, A_1, A', A_1' désignant quatre constantes arbitraires; on aura ainsi pour solution générale :

$$(12)\qquad \begin{cases} \theta = \mathrm{A}\cos rt + \mathrm{A}'\sin rt + \mathrm{A}_1\cos r_1 t + \mathrm{A}_1'\sin r_1 t, \\ \varphi = \dfrac{ar^2}{g-br^2}(\mathrm{A}\cos rt + \mathrm{A}'\sin rt) \\ \qquad + \dfrac{ar_1^2}{g-br_1^2}(\mathrm{A}_1\cos r_1 t + \mathrm{A}_1'\sin r_1 t), \end{cases}$$

et cette solution contenant quatre constantes arbitraires sera l'intégrale générale des équations (7), si l'on peut déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux conditions initiales qui sont pour $t = 0$:

$$\theta = \alpha, \quad \varphi = \beta,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

On trouve ainsi :

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha = A + A_1, \\ \beta = \dfrac{ar^2}{g - br^2} A + \dfrac{ar_1^2}{g - br_1^2} A_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'r + A_1' = 0, \\ \dfrac{A'r^3}{g - br^2} + \dfrac{A_1' r_1^3}{g - br_1^2} = 0. \end{cases}$$

On tire des deux dernières :

$$A'A_1' \frac{rr_1^3}{g - br_1^2} = A'A_1' \frac{r^3 r_1}{g - br^2},$$

ou bien :

$$A'A_1' rr_1 (r^2 - r_1^2) = 0,$$

d'où $A' = 0$, et ensuite $A_1' = 0$; et des deux premières, en posant :

$$(14) \quad \lambda = \frac{ar^2}{g - br^2}, \quad \lambda_1 = \frac{ar_1^2}{g - br_1^2},$$

$$\begin{cases} A + A_1 = \alpha, \\ A\lambda + A_1\lambda_1 = \beta, \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} A = \dfrac{\lambda_1 \alpha - \beta}{\lambda_1 - \lambda}, \\ A_1 = \dfrac{\beta - \alpha\lambda}{\lambda_1 - \lambda}. \end{cases}$$

On aura donc, pour la solution demandée :

$$(16) \quad \begin{cases} \theta = A \cos rt + A_1 \cos r_1 t, \\ \varphi = \lambda A \cos rt + \lambda_1 A_1 \cos r_1 t, \end{cases}$$

où A, A_1, λ, λ_1 ont les valeurs (15) et (14), r^2 et r_1^2 désignant les deux racines de l'équation (11).

Si l'on demande la condition pour que chacun des points m et m' oscille comme un pendule simple, on devra faire $A = 0$, ou $A_1 = 0$. Supposons $A = 0$; (15) et (14) donneront :

$$(17) \qquad \lambda_1 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{ar_1^2}{g - br_1^2}.$$

On en tire :

$$r_1^2 = \frac{g\beta}{a\alpha + b\beta},$$

et en portant cette valeur dans (11), à la place de r^2, il vient après simplification :

$$(18) \quad (m + m')\, a\alpha^2 + (m + m')(b - a)\,\alpha\beta - m' b \beta^2 = 0.$$

Cette équation est du second degré en $\frac{\alpha}{\beta}$; elle a toujours ses racines réelles, car le premier et le dernier coefficient sont de signes contraires; de plus, ces deux racines sont, l'une positive, l'autre négative; ces deux racines correspondent aux positions initiales. On a alors :

$$\theta = A_1 \cos r_1 t; \quad \varphi = \lambda_1 A_1 \cos r_1 t,$$

ce qui doit cadrer avec

$$(19) \qquad \theta = \alpha \cos r_1 t; \quad \varphi = \beta \cos r_1 t,$$

les durées des deux oscillations seront les mêmes; mais les amplitudes seront différentes; les deux points passeront en même temps par la verticale.

Remarque. — Si, à l'origine, les trois points O, M, M' étaient en ligne droite, on aurait $\alpha = \beta$; l'équation (18) donnerait :

$$mb = 0,$$

elle ne serait jamais vérifiée, à moins que l'on n'ait $m = 0$

ou $b = 0$; dans l'un ou l'autre cas, les points matériels se réduisent à un seul, et on a un pendule simple.

Dans le cas général, on obtiendra la valeur de r_1 qui figure dans les formules (19), en partant de (17), on déduit de cette formule :

$$r_1^2 = \frac{g\frac{\beta}{\alpha}}{a + b\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{g}{b + a\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Dans le cas où $a = b$, (18) donne :

$$(m + m')\,\alpha^2 = m'\,\beta^2,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \pm\sqrt{\frac{m'}{m + m'}};$$

nous aurons donc ces deux solutions :

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \beta\sqrt{\frac{m'}{m + m'}}\cos r_1 t\\ \varphi &= \beta\cos r_1 t\end{aligned}\right\}\quad a r_1^2 = \frac{g}{1 + \sqrt{\frac{m'}{m + m'}}},$$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= -\beta\sqrt{\frac{m'}{m + m'}}\cos r_1 t\\ \varphi &= \beta\cos r_1 t\end{aligned}\right\}\quad a r_1^2 = \frac{g}{1 - \sqrt{\frac{m'}{m + m'}}}.$$

Théorème de Jacobi.

83. Considérons le mouvement d'un point matériel libre dans le cas où il existe une fonction des forces U indépendante du temps; les équations différentielles du mouvement seront :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz};$$

U désigne la fonction des forces divisée par la masse du mobile. C'est une fonction de x, y, z.

Soit Θ une fonction de x, y, z contenant trois constantes arbitraires α, β, γ, autres que celles qu'on peut toujours introduire dans Θ par voie d'addition, et vérifiant identiquement l'équation aux dérivées partielles :

$$(2)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2\,(\mathrm{U} + \alpha).$$

Je dis que les équations (1) auront pour intégrales générales :

$$(3)\qquad \frac{d\Theta}{d\alpha} = t + \alpha'; \quad \frac{d\Theta}{d\beta} = \beta'; \quad \frac{d\Theta}{d\gamma} = \gamma';$$

α', β', γ' désignant trois nouvelles constantes ; les équations (3) donneront x, y, z en fonction de t et des six arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$.

Démonstration. — Admettons en effet les équations (2) et (3) ; nous allons montrer que les équations (1) en découlent.

Différentions les équations (3) relativement au temps ; nous aurons :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\Theta}{d\alpha\, dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\alpha\, dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\alpha\, dz}\frac{dz}{dt} = 1,\\
&\frac{d^2\Theta}{d\beta\, dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\beta\, dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\beta\, dz}\frac{dz}{dt} = 0,\\
&\frac{d^2\Theta}{d\gamma\, dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\gamma\, dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\Theta}{d\gamma\, dz}\frac{dz}{dt} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Or, si nous différentions l'équation (2) relativement à α, β, γ, nous trouverons :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Theta}{dx}\frac{d^2\Theta}{dx\, d\alpha} + \frac{d\Theta}{dy}\frac{d^2\Theta}{dy\, d\alpha} + \frac{d\Theta}{dz}\frac{d^2\Theta}{dz\, d\alpha} = 1,\\
&\frac{d\Theta}{dx}\frac{d^2\Theta}{dx\, d\beta} + \frac{d\Theta}{dy}\frac{d^2\Theta}{dy\, d\beta} + \frac{d\Theta}{dz}\frac{d^2\Theta}{dz\, d\beta} = 0,\\
&\frac{d\Theta}{dx}\frac{d^2\Theta}{dx\, d\gamma} + \frac{d\Theta}{dy}\frac{d^2\Theta}{dy\, d\gamma} + \frac{d\Theta}{dz}\frac{d^2\Theta}{dz\, d\gamma} = 0.
\end{aligned}\right.$$

(4) constitue un système de trois équations du premier

degré en $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; (5) est le même système où l'on aurait remplacé $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, respectivement par $\frac{d\Theta}{dx}, \frac{d\Theta}{dy}, \frac{d\Theta}{dz}$; on a donc :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\Theta}{dx}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\Theta}{dy}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\Theta}{dz}. \tag{6}$$

Ces équations (6) sont donc une conséquence de (2) et (3).

Partons de ces dernières équations; nous en tirerons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\Theta}{dx^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\Theta}{dx\,dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\Theta}{dx\,dz}\frac{dz}{dt},$$

ou, à cause de (6) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\Theta}{dx^2}\frac{d\Theta}{dx} + \frac{d^2\Theta}{dx\,dy}\frac{d\Theta}{dy} + \frac{d^2\Theta}{dx\,dz}\frac{d\Theta}{dz}. \tag{7}$$

Or, on tire de (2), qui a lieu quels que soient $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ en différentiant par rapport à x :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d\Theta}{dx}\frac{d^2\Theta}{dx^2} + \frac{d\Theta}{dy}\frac{d^2\Theta}{dy\,dx} + \frac{d\Theta}{dz}\frac{d^2\Theta}{dz\,dx}.$$

L'équation (7) donnera donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx},$$

et on verra qu'on a de même :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz}.$$

Ainsi, les valeurs de x, y, z, en fonction de t, déduites des équations (3), vérifient les équations (1); du reste, ces expressions de x, y, z contiennent six constantes arbitraires;

donc les équations (3) où Θ est défini par (2), constituent les intégrales générales des équations (1).

Les équations (6) sont très importantes, elles donnent des expressions très simples des composantes de la vitesse du point matériel.

On voit que toute la difficulté du problème est concentrée dans la recherche d'une solution de l'équation (2), qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, cette solution devant contenir trois constantes arbitraires. On n'a pas de méthode générale pour l'obtenir; cependant on peut découvrir cette solution dans un assez grand nombre de cas.

Remarque. — Puisque la fonction U ne contient pas le temps, l'intégrale des forces vives a lieu, on a donc :

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = 2\,(U + C),$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de (6) :

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2\,(U + C).$$

En comparant à (2), on voit que la constante α n'est autre chose que la constante C qui figure dans l'équation des forces vives.

84. Application au mouvement elliptique des planètes. — Soit r la distance d'une planète au centre du Soleil; la fonction des forces est de la forme $\frac{\mu}{r}$, μ désignant une constante; on est donc conduit à trouver une solution de l'équation :

$$(1)\quad \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2 = 2\left(\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C\right),$$

contenant trois constantes arbitraires C, G, H; alors le

mouvement sera déterminé par les trois intégrales :

$$(2)\qquad \frac{d\Theta}{dC}=t+c;\quad \frac{d\Theta}{dG}=g;\quad \frac{d\Theta}{dH}=h,$$

c, g, h désignant trois nouvelles constantes arbitraires.

Il convient d'introduire les coordonnées polaires dans l'équation (1); prenons le plan de l'écliptique pour plan des xy, désignons par ψ et φ la longitude et la latitude de la planète; nous aurons :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=r\cos\varphi\cos\psi,\\ y&=r\cos\varphi\sin\psi,\\ z&=r\sin\varphi,\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \psi&=\text{arc tg}\frac{y}{x},\\ \varphi&=\text{arc tg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit :

$$dr=\frac{xdx+ydy+zdz}{r};$$

$$d\psi=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

$$d\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz-\dfrac{z(xdx+ydy)}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2+z^2},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dx}&=\cos\varphi\cos\psi, & \frac{d\psi}{dx}&=-\frac{\sin\psi}{r\cos\varphi}, & \frac{d\varphi}{dx}&=-\frac{\sin\varphi\cos\psi}{r},\\ \frac{dr}{dy}&=\cos\varphi\sin\psi, & \frac{d\psi}{dy}&=+\frac{\cos\psi}{r\cos\varphi}, & \frac{d\varphi}{dy}&=-\frac{\sin\varphi\sin\psi}{r},\\ \frac{dr}{dz}&=\sin\varphi, & \frac{d\psi}{dz}&=0, & \frac{d\varphi}{dz}&=\frac{\cos\varphi}{r}; \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dx}&=\cos\varphi\cos\psi\frac{d\Theta}{dr}-\frac{\sin\psi}{r\cos\varphi}\frac{d\Theta}{d\psi}-\frac{\sin\varphi\cos\psi}{r}\frac{d\Theta}{d\varphi},\\ \frac{d\Theta}{dy}&=\cos\varphi\sin\psi\frac{d\Theta}{dr}+\frac{\cos\psi}{r\cos\varphi}\frac{d\Theta}{d\psi}-\frac{\sin\varphi\sin\psi}{r}\frac{d\Theta}{d\varphi},\\ \frac{d\Theta}{dz}&=\sin\varphi\frac{d\Theta}{dr}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{d\Theta}{d\varphi}. \end{aligned}$$

On en tire :

$$\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Theta}{dz}\right)^2=\left(\frac{d\Theta}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Theta}{d\psi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2;$$

l'équation (1) devient donc :

$$(4)\qquad \left(\frac{d\Theta}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Theta}{d\psi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Theta}{d\varphi}\right)^2=2\left(\frac{\mu}{r}+C\right).$$

Cherchons une solution de cette équation de la forme :

$$(5)\qquad \Theta=R+\Psi+\Phi;$$

ces trois fonctions ne contenant, la première que r, la seconde que ψ, la troisième que φ; nous aurons à vérifier l'équation :

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2=2\left(\frac{\mu}{r}+C\right),$$

quels que soient r, φ, ψ. On peut écrire :

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2=r^2\left\{-\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+2\left(\frac{\mu}{r}+C\right)\right\}.$$

Le premier membre de cette équation ne dépend que de φ et ψ, le second que de r; ces deux membres doivent être égaux quels que soient r, φ et ψ; on en conclut qu'ils devront être constants; on aura donc, en désignant par G^2 une constante :

$$(6)\qquad G^2=r^2\left\{-\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+2\left(\frac{\mu}{r}+C\right)\right\},$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2=G^2,$$

ou bien :

$$\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2=\cos^2\varphi\left\{G^2-\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2\right\}.$$

Le premier membre de cette équation ne dépend que de ψ,

le second que de φ; ces deux membres doivent être égaux quels que soient φ et ψ; on en conclut qu'ils doivent être égaux à une constante H^2; on aura donc :

$$(7) \qquad H^2 = \cos^2\varphi \left\{ G^2 - \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 \right\}$$

$$\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2 = H^2,$$

d'où :

$$\frac{d\Psi}{d\psi} = H,$$

$$(8) \qquad \Psi = H\psi.$$

L'équation (7) donne ensuite :

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 = G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi},$$

d'où :

$$(9) \qquad \Phi = \int \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi;$$

puis, on tire de (6) :

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = 2C + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2},$$

$$(10) \qquad R = \int \sqrt{2C + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\, dr.$$

On conclut enfin des formules (5), (8), (9) et (10) :

$$(11) \quad \Theta = \int \sqrt{2C + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\, dr + H\psi + \int \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Si l'on remettait dans cette formule, pour r, ψ et φ leurs valeurs en x, y, z, on aurait une fonction Θ de x, y, z, vérifiant identiquement l'équation (1) et contenant trois constantes arbitraires C, G, H; c'est bien la solution cherchée; on aura donc les intégrales du mouvement par les formules (2).

Signification géométrique des arbitraires C, G, H. — L'intégrale

$$\frac{d\Theta}{dC} = t + c,$$

ou bien :

$$t + C = \int \frac{dr}{\sqrt{2C + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}},$$

nous donne :

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2C + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}.$$

Les valeurs maxima et minima de r, qui sont $a\,(1 + e)$ et $a\,(1 - e)$, en représentant le demi petit axe par a, et l'excentricité par e, doivent donc être les deux racines de l'équation du second degré :

$$2Cr^2 + 2\mu r - G^2 = 0.$$

On en conclut :

$$\frac{-\mu}{C} = 2a; \qquad \frac{-G^2}{2C} = a^2\,(1 - e^2);$$

$$C = \frac{-\mu}{2a}; \qquad G = \sqrt{\mu}\,\sqrt{a\,(1 - e^2)} = \sqrt{\mu}\,\sqrt{p},$$

en désignant par p le paramètre de l'orbite. L'intégrale

$$\frac{d\Theta}{dH} = h$$

donne :

$$h = \psi - H \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi\,\sqrt{G^2\cos^2\varphi - H^2}}.$$

Le radical $\sqrt{G^2\cos^2\varphi - H^2}$ doit être réel; donc, la plus grande valeur de φ sera donnée par la formule :

$$\cos\varphi = \frac{H}{G};$$

or, la plus grande valeur de φ est l'inclinaison I de l'orbite de la planète sur le plan de l'écliptique; on a donc :

$$H = G \cos I.$$

Ainsi, on a :

$$(12)\qquad C = -\frac{\mu}{2a}; \qquad G = \sqrt{\mu}\sqrt{p}; \qquad H = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos I.$$

Telle est la signification géométrique des arbitraires C, G, H.

Avant d'aller plus loin, nous fixerons les limites inférieures des deux intégrales qui figurent dans (11); nous ferons commencer la seconde à partir de $\varphi = 0$, et la première, à partir de $r = a(1-e)$, ce qui répond au périhélie; cette limite $a(1-e)$ étant fonction de C et G, on pourrait craindre de modifier ainsi les dérivées $\frac{d\Theta}{dC}$ et $\frac{d\Theta}{dG}$; mais cela n'arrivera pas, parce que l'élément différentiel de l'intégrale $\int_{a(1-e)}^{r}\sqrt{2C+\frac{2\mu}{r}-\frac{G^2}{r^2}}\,dr$, s'annule pour $r = a(1-e)$.

Nous aurons donc :

$$(13)\quad \Theta = \int_{a(1-e)}^{r}\sqrt{2C+\frac{2\mu}{r}-\frac{G^2}{r^2}}\,dr + H\psi + \int_0^{\varphi}\sqrt{G^2-\frac{H^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi$$

et nos intégrales seront :

$$(14)\qquad t + c = \int_{a(1-e)}^{r}\frac{dr}{\sqrt{2C+\frac{2\mu}{r}-\frac{G^2}{r^2}}},$$

$$(15)\quad g = G\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{G^2-\frac{H^2}{\cos^2\varphi}}} - G\int_{a(1-e)}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{2C+\frac{2\mu}{r}-\frac{G^2}{r^2}}},$$

$$(16)\qquad h = \psi - H\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{G^2-\frac{H^2}{\cos^2\varphi}}}.$$

Si, dans (13), on fait $r = a(1-e)$, on aura $t + c = 0$,

$c = -t$; si donc τ désigne le moment du passage de la planète au périhélie, on aura :

$$c = -\tau.$$

Si, dans (16), on fait $\varphi = 0$, ce qui répond au nœud, on trouve $h = \psi$; donc h est la longitude du nœud.

Enfin, si, dans (15), on suppose que les limites supérieures se rapportent au périhélie, on aura, en désignant par φ_1 la valeur correspondante de φ :

$$(17) \quad g = G\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\varphi}}} = G\int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{G^2\cos^2\varphi - H^2}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d.\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2\varphi}}.$$

Si on pose d'une manière générale,

$$(18) \qquad \sin\varphi = \sin I \sin\eta,$$

il viendra :

$$\frac{d.\sin\varphi}{\sqrt{\sin^2 I - \sin^2\varphi}} = d\eta,$$

et la formule (17) donnera :

$$g = \int_0^{\varphi_1} d\eta,$$

$g = \eta_1$, η_1 désignant la valeur de η qui répond au périhélie.

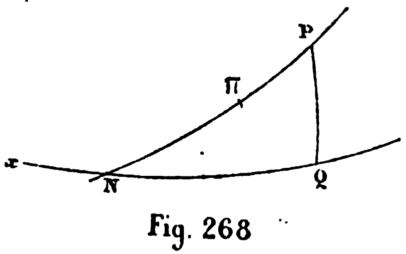


Fig. 268

Soient, sur une sphère ayant pour centre le centre du Soleil, NP le grand cercle qui représente l'orbite de la planète, P une position quelconque de la planète, PQ l'arc de grand cercle mené par P perpendiculairement à l'écliptique;

on a :

$$PQ = \varphi; \quad PNQ = I;$$

le triangle sphérique rectangle NQP donne :

$$\sin\varphi = \sin I \sin NP;$$

en comparant à (18), on en conclut :

$$\eta = NP.$$

Si donc P coïncide avec le périhélie Π, on aura :

$$\eta_1 = g = N\Pi.$$

Nous aurons donc, en résumé :

$$C = -\frac{\mu}{2a}; \quad G = \sqrt{\mu p}; \quad H = \sqrt{\mu p}\cos I,$$
$$c = -\tau; \quad g = N\Pi; \quad h = xN.$$

(14) donnera r; (15) et (16) donneront φ et ψ en fonction de t et des six constantes ou éléments elliptiques C, G, H, c, g, h.

85. Mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, suivant la loi de Newton. — *On suppose que le mouvement a lieu dans un plan contenant les deux centres fixes.* — Soient C et C' les deux centres fixes, $CC' = 2c$; prenons cette droite pour axe des x, et la perpendiculaire menée

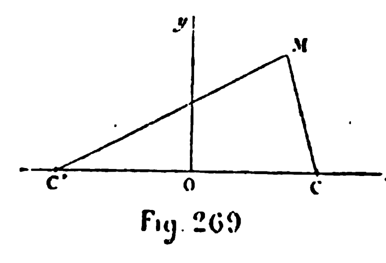


Fig. 269

par le milieu de CC' pour axe des y; soient $\frac{a}{MC}$, et $\frac{a}{MC'}$, les attractions des centres C et C' sur l'unité de masse placée en M; on aura pour la fonction des forces :

$$U = \frac{a}{MC} + \frac{a'}{MC'},$$

ou, en désignant par x et y les coordonnées de M :

$$(1) \qquad U = \frac{a}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{a'}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}};$$

on aura donc à considérer l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(2) \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)^2 = 2\left\{\frac{a}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{a'}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}} + C\right\}.$$

Il suffira de trouver une solution contenant les deux constantes C et H, et en désignant par c et h deux nouvelles constantes, le mouvement sera donné par les deux intégrales :

$$(3) \qquad \frac{d\Theta}{dC} = t + c; \quad \frac{d\Theta}{dh} = h,$$

qui fourniront x et y en fonction des quatre constantes C, c, H, h et du temps t.

Pour trouver une telle solution de l'équation (1), il convient de faire un changement de variables; on sait que, par un point quelconque M(x, y), on peut faire passer une ellipse et une hyperbole ayant pour foyers les deux points C et C'. Soient 2λ et 2μ les longueurs des axes transverses de ces deux courbes; on aura :

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1; \quad \lambda^2 > c^2 \\ &\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2-\mu^2} = 1; \quad \mu^2 < c^2 \end{aligned}\right. \quad \lambda^2 > c^2 > \mu^2.$$

On tire de ces équations :

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\lambda\mu}{c}, \\ y &= \frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{c}. \end{aligned}\right.$$

Nous introduirons, au lieu des coordonnées x et y, les

variables λ et μ, que l'on nomme les coordonnées elliptiques du point M.

Il faut voir ce que devient l'équation (2), quand on y introduit λ et μ; on déduit aisément de (5) :

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\mu}{c}\frac{d\theta}{dx} + \frac{\lambda\sqrt{c^2-\mu^2}}{c\sqrt{\lambda^2-c^2}}\frac{d\theta}{dy},$$

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{\lambda}{c}\frac{d\theta}{dx} - \frac{\mu\sqrt{\lambda^2-c^2}}{c\sqrt{c^2-\mu^2}}\frac{d\theta}{dy},$$

et, en résolvant ces deux équations par rapport à $\frac{d\theta}{dx}$ et $\frac{d\theta}{dy}$:

$$c(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\theta}{dx} = \mu(\lambda^2-c^2)\frac{d\theta}{d\lambda} + \lambda(c^2-\mu^2)\frac{d\theta}{d\mu},$$

$$c(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\theta}{dy} = \lambda\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\frac{d\theta}{d\lambda} - \mu\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\frac{d\theta}{d\mu};$$

d'où on tire, après réductions :

$$(6)\quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}\left\{(\lambda^2-c^2)\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + (c^2-\mu^2)\left(\frac{d\theta}{d\mu}\right)^2\right\}.$$

On trouve ensuite, en ayant égard à (5) :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}(x-c)^2+y^2=(\lambda-\mu)^2,\\(x+c)^2+y^2=(\lambda+\mu)^2,\end{array}\right. \quad \Bigg| \quad U = \frac{a}{\lambda-\mu} + \frac{a'}{\lambda+\mu}.$$

En tenant compte de (6) et (7), l'équation (2) devient :

$$(8)\quad (\lambda^2-c^2)\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + (c^2-\mu^2)\left(\frac{d\theta}{d\mu}\right)^2$$
$$= 2\left\{a(\lambda+\mu) + a'(\lambda-\mu) + C(\lambda^2-\mu^2)\right\}.$$

Nous chercherons une solution de cette équation, de la forme :

$$(9)\qquad \theta = L + M;$$

L étant une fonction de λ seul, M ne dépendant que de μ;

en substituant dans (8), il viendra :

$$(\lambda^2 - c^2)\left(\frac{dL}{d\mu}\right)^2 - 2\lambda(a + a') - 2C\lambda^2 = -(c^2 - \mu^2)\left(\frac{dM}{d\mu}\right)^2 + 2\mu(a - a') - 2C\mu^2.$$

Les deux membres de cette équation doivent être égaux quels que soient λ et μ, considérées comme variables indépendantes; le premier membre ne dépend que de λ, le second que de μ; donc, ces deux membres sont égaux à une constante H. Nous aurons donc :

$$(\lambda^2 - c^2)\left(\frac{dL}{d\lambda}\right)^2 - 2\lambda(a + a') - 2C\lambda^2 = H,$$

$$(c^2 - \mu^2)\left(\frac{dM}{d\mu}\right)^2 - 2\mu(a - a') + 2C\mu^2 = -H;$$

d'où :

$$L = \int \sqrt{\frac{H + 2\lambda(a + a') + 2C\lambda^2}{\lambda^2 - c^2}}\, d\lambda,$$

$$M = \int \sqrt{\frac{-H + 2\mu(a - a') - 2C\mu^2}{c^2 - \mu^2}}\, d\mu.$$

On a donc :

$$\theta = \int \sqrt{\frac{H + 2\lambda(a + a') + 2C\lambda^2}{\lambda^2 - c^2}}\, d\lambda + \int \sqrt{\frac{-H + 2\mu(a - a') - 2C\mu^2}{c^2 - \mu^2}}\, d\mu.$$

Cette fonction Θ contient deux constantes arbitraires C et H, elle vérifie identiquement l'équation (8); elle vérifierait l'équation (2), si l'on y remplaçait λ et μ par leurs valeurs en x et y; c'est donc bien la solution cherchée; les intégrales du mouvement seront, en vertu des équations (3) :

$$(10)\quad t + C = \int \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{H + 2\lambda(a + a') + 2C\lambda^2}} - \int \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{-H + 2\mu(a - a') - 2C\mu^2}},$$

$$(11)\quad h=\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{H+2\lambda(a+a')+2C\lambda^2}}-\int\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{-H+2\mu(a-a')-2C\mu^2}}.$$

Ces équations feront connaître λ et μ en fonction de t, et des quatre constantes C, c, H et h; la dernière peut s'écrire :

$$(12)\quad \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{H+2\lambda(a+a')+2C\lambda^2}}=\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{-H+2\mu(a-a')-2C\mu^2}},$$

en désignant par λ_0 et μ_0 les valeurs initiales de λ et μ; la constante h est ainsi remplacée par μ_0; C est la constante des forces vives; on aura, pour la déterminer, l'équation :

$$2C=v_0^2-\frac{2a}{\lambda_0-\mu_0}-\frac{2a'}{\lambda_0+\mu_0}.$$

La constante H se déterminera par l'équation

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)_0=\frac{\sqrt{\lambda_0^2-c^2}}{\sqrt{c^2-\mu_0^2}}\frac{\sqrt{H+2\lambda_0(a+a')+2c\lambda_0^2}}{\sqrt{-H+2\mu_0(a-a')-2c\mu_0^2}},$$

déduite de (12); le rapport $\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)_0$ sera déduit de $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$.

L'équation (12) est l'équation de la trajectoire; elle contient deux intégrales elliptiques; l'équation (10) en contient deux autres. (Pour plus de détails, voir Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*.)

Remarque. — En désignant par r et r' les distances du mobile aux deux centres fixes, on a :

$$r=\lambda-\mu;\quad r'=\lambda+\mu,$$

d'où :

$$\lambda=\frac{r+r'}{2};\quad \mu=\frac{r'-r}{2}.$$

Équations canoniques.

86. Nous avons trouvé les équations générales :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

dans lesquelles T est une fonction de t, q_1, q_2, ..., q_k, q'_1, q'_2, ..., q'_k, et les Q_i sont des fonctions des mêmes variables. Nous avons donc k variables, q et k variables q' ; nous allons faire un nouveau changement de variables, en posant :

$$(2) \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2; \quad \dots; \quad \frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k.$$

Nous garderons les variables q, mais nous remplacerons les variables q' par les nouvelles variables p ; les équations (2) sont des équations du premier degré relativement aux variables q' ; elles déterminent les q' en fonction des p et des q. En reportant dans T, nous aurons T en fonction des p et des q, tandis qu'auparavant nous avions T en fonction des q et des q' ; nous distinguerons les dérivées partielles de T relatives aux q, dans les deux cas, en mettant des parenthèses lorsque T est considéré comme fonction des q et des q', et nous n'en mettrons pas dans l'autre cas. L'équation (1) s'écrira :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = Q_i;$$

nous aurons ensuite :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

d'où :

$$(3) \qquad \frac{dp_i}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i.$$

Nous supposerons les liaisons indépendantes du temps ;

alors T est une fonction des q et des q', et nous aurons :

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i,$$

ou bien, à cause de (2) :

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i + \Sigma p_i\, dq'_i,$$

ce qui peut s'écrire :

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i + d.\Sigma p_i q'_i - \Sigma q'_i\, dp_i,$$

ou encore :

$$d\,(T - \Sigma p_i q'_i) = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i - \Sigma q'_i\, dp_i.$$

Posons :

(4) $$\Sigma p_i q'_i - T = K,$$

et nous aurons :

$$dK = \Sigma q'_i\, dp_i - \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i;$$

mais, K étant exprimé au moyen des p et des q, on doit avoir :

$$dK = \Sigma \frac{\partial K}{\partial p_i} dp_i + \Sigma \frac{\partial K}{\partial q_i} dq_i.$$

On en conclut, en comparant les deux expressions de dK :

(5) $$q'_i = \frac{\partial K}{\partial p_i};$$ (6) $$-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial K}{\partial q_i},$$

(5) donne, en remplaçant q'_i par $\frac{dq_i}{dt}$:

(7) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}.$$

On conclut de (3) et (6) :

(8) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i.$$

Nous avons supposé les liaisons indépendantes du temps; alors T est une fonction homogène du second degré, relativement aux quantités q'. On a donc :

$$(9) \qquad 2T = \Sigma q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \Sigma p_i q'_i;$$

la formule (4) donnera :

$$K = T.$$

Les équations (7) et (8) donneront donc :

$$(10) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i},$$

$$(11) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i.$$

Supposons actuellement que les composantes X, Y, Z, ... des forces qui agissent sur les divers points du système, ne contiennent pas les composantes des vitesses, $\frac{dx}{dt}, \ldots$, mais seulement le temps t et les coordonnées x, y, z, ..., et qu'en outre il y ait une fonction des forces U pouvant contenir le temps; on aura :

$$(12) \qquad U = \Phi(t, q_1 q_2 \ldots q_k);$$

on aura en outre, comme on sait :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Les équations (10) et (11) deviendront :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

On peut les écrire comme il suit, en remarquant que U ne

contient pas les variables p :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (T - U)}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{-\partial (T - U)}{\partial q_i},$$

ou bien, en faisant :

$$T - U = H,$$

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases}$$

On a ainsi les équations *canoniques* d'Hamilton.

H est une fonction de t et des $2k$ variables $q_1, q_2, \dots, q_k$; $p_1, p_2, \dots, p_k$; les équations (13), dans lesquelles l'indice i reçoit les valeurs 1, 2, ..., k, constituent un système de $2k$ équations différentielles simultanées du premier ordre.

C'est Poisson qui a introduit le premier les variables p au lieu des variables q'; mais il n'était pas arrivé à la forme simple (13), donnée pour la première fois par Hamilton.

Théorème de Jacobi.

87. La détermination du mouvement d'un système de points matériels, quand les liaisons sont indépendantes du temps, et quand il existe une fonction des forces, indépendante des vitesses, mais pouvant contenir le temps explicitement, se ramène à l'intégration du système suivant d'équations simultanées :

$$(1) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \qquad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}; \qquad \dots; \qquad \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n},$$

$$(2) \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}; \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}; \qquad \dots; \qquad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{d H}{d q_n}.$$

où :

$$H = T - U;$$

en mettant en évidence les quantités qui figurent dans H, on peut écrire :

(3) $$H = H(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Voici en quoi consiste le théorème de Jacobi.

Supposons qu'on ait trouvé une fonction S de t, q_1, q_2, ..., q_n et de n constantes arbitraires a_1, a_2, ..., a_n; ces n constantes sont essentiellement distinctes de celle qu'on peut ajouter à S, sans cesser de vérifier l'équation (5) :

(4) $$S = \Phi(t, q_1, q_2, \dots, q_n; a_1, a_2, \dots, a_n);$$

vérifiant identiquement l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :

(5) $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0;$$

on voit que la fonction H qui figure dans cette équation, se déduit de l'expression (3) de H, en y remplaçant p_1 par $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, p_2 par $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, ... Il arrivera donc que (4) étant substitué dans (5), on devra avoir une identité, quels que soient t, q_1, q_2, ..., q_n, a_1, a_2, ..., a_n. Je dis qu'en désignant par b_1, b_2, ..., b_n n nouvelles constantes arbitraires, on aura pour les intégrales générales des équations (1) et (2) le système suivant :

(6) $$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1; \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n.$$

(7) $$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2; \quad \dots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = b_n.$$

On voit qu'en portant l'expression (4) de S dans (6) et (7), les équations (6) donneront les p en fonction du temps, des q et des n arbitraires a_1, a_2, ..., a_n; les équations (7)

donneront les q en fonction du temps et des $2n$ arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Donc, en somme, (6) et (7) déterminent les variables p et q en fonction du temps et de $2n$ arbitraires. Il ne reste plus qu'à démontrer que ces fonctions du temps et des $2n$ arbitraires vérifient les équations (1) et (2), quelles que soient les valeurs attribuées à ces $2n$ arbitraires.

On tire de la première équation (7), en différentiant relativement au temps :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \, \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \, \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \, \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0;$$

ou bien :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \, \partial t} + \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} \right) \frac{dq_2}{dt} + \ldots = 0,$$

ce qui peut s'écrire encore, en tenant compte de (6) :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_1 \, \partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_1} \dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_1} \dfrac{dq_2}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial p_n}{\partial a_1} \dfrac{dq_n}{dt} = 0. \\ \text{On aura de même :} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_2 \, \partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_2} \dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_2} \dfrac{dq_2}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial p_n}{\partial a_2} \dfrac{dq_n}{dt} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_n \, \partial t} + \dfrac{\partial p_1}{\partial a_n} \dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial p_2}{\partial a_n} \dfrac{dq_2}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial p_n}{da_n} \dfrac{dq_n}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

C'est là un système de n équations du premier degré aux n inconnues, $\frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}$.

D'autre part, on déduit de (5) et (6) que l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_1 \, q_2 \ldots q_k, p_1 \, p_2 \ldots p_k) = 0$$

doit devenir identique, en y remplaçant S par sa valeur (4) et les variables p par leurs valeurs en fonction de t, des q et des a, tirées de (6); on pourra donc différentier l'équation (9) par rapport à chacune des arbitraires $a_1, \ldots, a_n$; ce qui donnera :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial a_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial a_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial a_1} + \ldots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial a_2} + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial a_2} + \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial a_2} + \ldots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{d p_n}{d a_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial a_n} + \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial p_1}{\partial a} + \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial p_2}{\partial a_n} + \ldots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_n}{\partial a_n} = 0. \end{array} \right.$$

C'est là un système de n équations du premier degré aux n inconnues $\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial H}{\partial p_n}$; ce système est le même que (8); les inconnues ont donc les mêmes valeurs dans les deux systèmes; ainsi, on a :

$$(11) \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}; \quad \ldots; \quad \frac{dq_n}{at} = \frac{\partial H}{\partial p_n}.$$

Les équations (1) ont donc bien lieu.

Partons maintenant de l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1;$$

nous en tirerons :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial q_n}\frac{dq_n}{dt},$$

ou bien, en tenant compte de (11) :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}\frac{dH}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial q_2}\frac{\partial H}{dp_2} + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1\, \partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n};$$

ce qui, en tenant compte de

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1},$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\partial p_2}{\partial q_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

peut s'écrire :

$$(12) \quad \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_1}.$$

Or, on tire de (9), en différentiant par rapport à q_1 :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_1} = 0.$$

En retranchant cette équation de (12), il vient :

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

Ainsi se trouve démontrée la première des formules (2); on démontrera les autres de la même manière. Le théorème de Jacobi est donc démontré.

Considérons en particulier le mouvement d'un point matériel libre, et supposons qu'il existe une fonction des forces U, indépendante du temps; on aura, comme on sait, les équations :

$$(13) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

En posant :

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = x'; \quad \frac{dy}{dt} = y'; \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

il vient :

$$(15) \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

La force vive 2T du point matériel a pour expression :

$$2T = m(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

on en conclut :

$$x' = \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial x'}; \quad y' = \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial y'}; \quad z' = \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial z'},$$

en remarquant que U est indépendant de x', y', z' et T de x, y, z, les équations (14) et (15) pourront s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\left(\frac{T}{m} - U\right)}{\partial x'} \cdots,$$

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{\partial\left(\frac{T}{m} - U\right)}{dx}.$$

On voit donc que pour rentrer dans les conditions du dernier théorème de Jacobi, il suffit de faire :

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z,$$
$$p_1 = x'; \quad p_2 = y'; \quad p_3 = z',$$

$$H = \frac{T}{m} - U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - U = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - U;$$

on aura alors les équations :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si donc on applique le théorème de Jacobi, l'équation aux dérivées partielles sera :

$$(16) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} - U = 0.$$

Pour trouver une solution de cette équation avec trois constantes arbitraires, nous remarquerons d'abord que cette équation ne contient pas le temps t explicitement et nous

ferons :

(17) $$S = -\alpha t + \Theta,$$

α étant une constante, et Θ ne contenant plus t explicitement; l'équation (16) deviendra :

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2 = 2(U + \alpha).$$

Supposons trouvée une solution Θ de cette dernière équation, contenant deux nouvelles constantes arbitraires β et γ, nous aurons, en désignant par α', β', γ' trois constantes arbitraires :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha'; \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = \beta'; \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \gamma';$$

ou bien, à cause de (17) :

$$t + \alpha' = \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}; \quad \beta' = \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}; \quad \gamma' = \frac{\partial\Theta}{\partial\gamma}.$$

On retrouve ainsi le théorème démontré directement plus haut.

CINQUIÈME PARTIE

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE.

1. Considérations générales. — Les fluides. — Pris dans toute leur complexité, les corps naturels sont inaccessibles aux mathématiques, qui ne peuvent s'appliquer qu'à des êtres idéaux géométriquement définis, rappelant sinon en totalité, du moins en partie, les caractères des corps naturels.

Mais il doit forcément arriver dans certains cas que les caractères que l'on avait négligés dans la construction du type géométrique, jouent à un moment donné un rôle important.

Le corps solide rigide, par exemple, dont les propriétés mécaniques ont été exposées dans le cours, rentre dans la catégorie de ces êtres abstraits dont nous parlons. Or, à l'occasion de l'indétermination des pressions d'un solide reposant sur plus de trois points d'appui, on a fait remarquer combien insuffisante était cette conception, au point d'entraîner des conséquences contradictoires avec les faits observés. C'est qu'il n'existe pas en effet de corps parfaitement rigide, pas de corps qui ne fléchisse et se déforme plus ou moins, même sous l'action de très petites forces.

Négligeables dans certains cas, ces déformations ont maintenant le rôle principal; et l'on sent alors la nécessité d'une conception nouvelle qui se substitue à celle du solide rigide, lorsque celle-ci tombera en défaut. Or, c'est là le but que se propose la théorie de l'élasticité, qui a pour objet l'étude mécanique du nouvel être abstrait qui s'appelle le corps *solide élastique*. Mais, hâtons-nous de le dire, malgré sa conception plus large, le solide élastique a lui aussi un rôle limité, et il doit s'effacer dans bien des cas, soit pour faire place à quelque autre conception abstraite, soit pour laisser le champ libre à l'empirisme; car dans un ordre d'idées qui touche de si près aux applications industrielles, les exigences de la pratique sont bien plus étendues que les développements de la théorie.

2. Il y a notamment une classe spéciale de corps qui s'écartent trop nettement des solides naturels pour que l'on puisse songer à prendre le solide rigide, ou le solide élastique pour base d'une première approximation, et où, tout au contraire, la grande mobilité des diverses parties, l'extrême facilité avec laquelle elles cèdent au moindre effort, ont conduit à chercher pour ces corps une première approximation dans l'hypothèse d'une mobilité absolue, et d'une essentielle instabilité de forme.

Il n'y a pas cependant non plus de liquide, ni de gaz qui n'oppose une certaine résistance aux déformations; mais, la faiblesse de cette résistance justifie la conception du fluide, tout aussi bien que la petitesse des déformations des solides naturels justifie celle du corps parfaitement rigide.

A vrai dire d'ailleurs, nous n'avons pas à justifier ici ces diverses conceptions; pas plus que l'on n'a cherché à justifier les principes fondamentaux qui servent de base à la mécanique. Nous nous bornerons à donner une défini-

tion claire et précise des fluides, et à en développer ensuite les conséquences légitimes.

3. Définition du fluide. — Un fluide sera donc pour nous un système de points matériels extrêmement voisins, agissant les uns sur les autres, de telle sorte que dans leurs déplacements relatifs, ils glissent entre eux sans qu'il en résulte de frottement. Cette expression de glissement sans frottement demande à être expliquée, et acquerra plus loin une signification très précise.

4. Principe de la solidification. — Tirons d'abord parti de ce qu'un fluide est un système de points matériels, et appliquons le principe suivant de la statique :

Lorsqu'un système de points matériels est en équilibre, on peut, sans troubler l'équilibre, introduire des liaisons compatibles avec la figure d'équilibre.

Nous pourrons donc, dans nos raisonnements, supposer qu'une partie du liquide est solidifiée, c'est à dire que les points matériels qui le composent, se trouvent invariablement reliés entre eux, aux distances mêmes de la position actuelle d'équilibre.

5. Pression. — Envisageons donc un fluide et prenons tous les points matériels du système, répartis sur un élément superficiel infiniment petit d'aire ω, élément que nous pouvons supposer plan. Solidifions le système ainsi obtenu. Tout le fluide situé d'un même côté du plan de l'élément exerce une action sur chacun des points de cet élément, et toutes ces actions, qui, en vertu de la continuité, sont très peu inclinées les unes sur les autres, se composeront en une force P, du même ordre infinitésimal que ω, appliquée en un point quelconque O de l'élément, et en un couple d'un ordre infinitésimal de deux unités plus élevé. On ne

tient pas compte du couple, et il ne reste que la force P qui est la *pression totale* sur l'élément ω.

Le quotient $\frac{P}{\omega}$ a reçu le nom de pression rapportée à l'unité de surface ou simplement de *pression*.

6. Direction de la pression. — La composante tangentielle de la pression totale, c'est à dire sa projection sur le plan de l'élément, est regardée comme représentant l'action tangentielle du fluide sur cet élément. Or, si les glissements doivent s'effectuer sans frottement dans le fluide, cette action tangentielle ne peut exister, et la signification précise de l'expression de glissement sans frottement qui figure dans la définition du fluide, consiste justement en ce que la composante tangentielle de la pression est nulle.

Nous admettrons donc comme un fait découlant de la définition même du fluide que :

La pression est normale à l'élément pressé.

7. Il semble au premier abord qu'il y ait lieu de considérer deux pressions sur un élément, à savoir celle qui provient de l'action du fluide situé d'un côté A de l'élément et celle qui provient du côté opposé B.

Pour élucider ce point, cherchons les conditions de l'équilibre de translation du système solidifié ω, et appelons, comme précédemment, P la pression exercée par la portion A, Q celle qui est exercée par la partie B.

L'élément ω est en équilibre sous l'influence de P, de Q et de la résultante des forces extérieures, qui comprennent les forces d'inertie s'il y a lieu. Cette résultante qui est de l'ordre de la masse, c'est à dire du volume, est donc d'un ordre infinitésimal, supérieur à celui de P et de Q, en sorte que la condition d'équilibre de translation consiste en ce que P et Q sont égales et contraires.

Ce fait est tout à fait analogue à celui qui se présente dans la définition de la tension des fils flexibles et inextensibles. Il nous montre que lorsque nous parlerons de pression totale, il faudra toujours préciser le sens dans lequel agit cette pression.

8. Problème de l'hydrostatique. — Nous pouvons maintenant énoncer le problème fondamental de la statique des fluides ou *hydrostatique*.

Déterminer en tout point du fluide et pour une orientation quelconque d'un élément décrit autour de ce point la pression correspondante.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point A; α, β, γ les cosinus des angles que fait avec les trois axes la normale au plan d'un élément entourant le point A.

Le problème consiste à exprimer la pression en fonction de x, y, z, α, β, γ, lorsque l'on connaît les forces extérieures qui agissent sur les points matériels dont se compose le fluide.

9. Simplification du problème. — Or, et c'est là un fait bien remarquable, la fonction cherchée ne dépend pas de α, β, γ, c'est à dire de l'orientation du plan de l'élément, en sorte que la pression varie seulement avec le point autour duquel l'élément se trouve décrit.

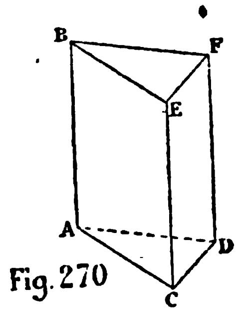


Fig. 270

Pour démontrer ce théorème important, envisageons deux éléments passant par un même point A, et dont les plans BAC, BAD se coupent suivant la droite AB : avec ces deux plans, avec deux autres plans perpendiculaires à AB, infiniment voisins, et un cinquième parallèle à cette droite et également incliné sur les deux premiers, formons un prisme

droit isocèle infiniment petit ayant en A un sommet. Solidifions tous les points du fluide intérieurs à ce prisme, et remarquons que les pressions totales, agissant sur les faces de l'extérieur à l'intérieur, et les forces extérieures doivent se faire équilibre sur le prisme solidifié. Projetons alors sur la droite CD les pressions et les forces extérieures, qui comprennent les forces d'inertie s'il y a lieu. En appelant P la pression totale sur la face BAC, Q la pression totale sur la face BAD, et F la projection sur CD de la résultante des forces extérieures, il faudra avoir, α étant l'angle ACD, lequel est égal à ADC :

$$P \sin \alpha - Q \sin \alpha + F = 0.$$

On remarquera que P et Q étant de l'ordre des faces sont du second ordre, tandis que F est de l'ordre du volume, c'est à dire du troisième; si l'on désigne alors par ω la valeur commune des aires égales BACE, BADF, on aura, après division par $\omega \sin \alpha$:

$$\frac{P}{\omega} - \frac{Q}{\omega} = 0;$$

ce qui exprime que la pression par unité de surface, ou simplement la *pression,* est la même pour les deux orientations d'éléments BAC et BAD prises quelconques autour du point A.

Ainsi se trouve démontrée la proposition importante sur laquelle se fonde la simplification que nous avons énoncée. Il ne reste donc plus qu'à trouver la pression en fonction des coordonnées du point (x, y, z) par où doit passer l'élément pressé.

10. Équations de l'hydrostatique. — Pour résoudre ce problème, enfermons dans un parallélipipède infiniment

petit, dont les arêtes soient parallèles aux axes, une masse de fluide et solidifions-la.

Le solide ainsi obtenu doit être en équililibre sous l'influence des pressions totales qui s'exercent sur les faces de l'extérieur à l'intérieur, combinées avec les forces extérieures qui agissent sur chaque point matériel de la masse.

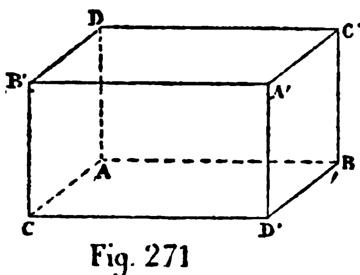


Fig. 271

Exprimons donc que la somme des projections sur Ox de ces différentes forces est égal à zéro.

Soient (x, y, z) les coordonnées du sommet A, le plus rapproché de l'origine, et a, b, c les longueurs des arêtes AB, AC, AD. Désignons aussi par p la valeur de la pression au point (x, y, z). En un point infiniment voisin $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, la pression aura pour valeur :

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z;$$

en particulier, au point B elle sera :

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}a.$$

Or, les seules pressions totales qui ne soient pas rectangulaires avec Ox, sont celles qui s'exercent sur les faces ACB'D, BD'A'C'. Elles se projettent d'ailleurs en vraie grandeur, et en mettant les signes en évidence, la pression totale sur la première face donne :

$$p.bc,$$

et la pression totale sur la seconde :

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}a\right)bc,$$

d'où finalement, pour la somme des projections sur Ox des pressions :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot abc.$$

D'autre part, la projection sur Ox de la résultante des forces extérieures peut se représenter par

$$X\,dm,$$

où dm désigne la masse totale du fluide renfermé dans le parallélipipède. On a donc l'équation :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} abc + X\,dm = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dm}{abc} X.$$

Et en opérant de même pour l'axe Oy et l'axe Oz :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dm}{abc} Y,$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dm}{abc} Z.$$

Maintenant on remarquera que le quotient de la masse dm d'un volume élémentaire par ce volume n'est autre que la densité ρ du fluide, en sorte que les équations précédentes s'écrivent ainsi :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z. \end{aligned} \right.$$

11. Il importe d'ajouter que ces équations suffisent pour traduire l'équilibre des pressions et des forces extérieures

qui agissent sur le parallélipipède. On se représente en effet la force extérieure comme appliquée en un point I intérieur au parallélipipède, et l'on peut supposer la pression totale sur chaque face appliquée au point suivant lequel le point I se projette sur cette face.

Toutes les forces que l'on considère sont alors concourantes au point I, et les équations (1) suffisent pour traduire leur équilibre.

Il en résulte que les équations (1), si elles sont vérifiées en un point quelconque du fluide, assurent l'équilibre de toute la masse.

12. Surfaces de niveau. — Les trois équations (1) contiennent la solution générale du problème de l'hydrostatique. Elles se résument dans la suivante :

$$dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz); \tag{2}$$

c'est à dire que l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ peut être rendue intégrable par l'introduction d'un multiplicateur, et que la densité ρ est l'un de ces facteurs intégrants.

Appelons donc $U(x, y, z)$ une fonction *entièrement déterminée,* admettant $\rho(X dx + Y dy + Z dz)$ pour différentielle totale; l'équation (2) nous donne :

$$p = U(x, y, z) + C; \tag{3}$$

où C est une constante que l'on déterminera en se donnant la pression p_0 en un point x_0, y_0, z_0. La constante étant supposée déterminée, nous pourrons la faire rentrer dans la fonction U, et nous aurons :

$$p = U(x, y, z).$$

Le problème de l'hydrostatique sera donc entièrement résolu lorsque l'on connaîtra la fonction U. Nous reviendrons plus loin sur sa détermination, mais nous allons

présenter tout d'abord quelques considérations sur les *surfaces de niveau.*

Le lieu des points pour lesquels la pression est la même est une surface représentée par l'équation :

$$U(x, y, z) = p = \text{constante}.$$

Les diverses surfaces que l'on obtient ainsi, ont reçu le nom de *surfaces de niveau.*

Par toût point du fluide il passe une surface de niveau, lieu des points pour lesquels la pression est la même qu'en ce point. J'ajoute que :

En tout point du fluide, la force extérieure est normale à la surface de niveau qui passe en ce point.

Les cosinus directeurs λ, μ, ν de la force ont en effet pour valeur :

$$(4) \quad \lambda = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \mu = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \nu = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

D'autre part, les cosinus directeurs d'une des deux directions de la normale à la surface de niveau sont égaux à

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

et comme l'on a :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \rho Z,$$

ces expressions coïncident avec les expressions (4).

13. Dérivée de la pression suivant une direction. — Ce théorème peut être complété de la façon suivante :

Remarquons que la pression variant avec x, y, z, la différentielle de sa valeur quand on passe du point P (x, y, z) au point P' $(x + dx, y + dy, z + dz)$ a pour expression, en vertu de l'équation (2) :

$$dp = \rho X\, dx + \rho Y\, dy + \rho Z\, dz.$$

Soit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ la différentielle du déplacement PP' : le quotient $\frac{dp}{ds}$ a reçu le nom de *dérivée de la pression suivant la direction* PP'.

Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de cette direction, on a évidemment :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

d'où :

$$\frac{dp}{ds} = \rho\,(X\alpha + Y\beta + Z\gamma).$$

Représentons par $\rho F = \rho \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ la force extérieure, on trouvera, en vertu des équations (4) :

$$\frac{dp}{ds} = \rho F\,(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma);$$

ou enfin, θ étant l'angle du déplacement PP' avec la direction de la force :

$$(5) \qquad \frac{dp}{ds} = \rho F \cos \theta.$$

Si l'on représente la dérivée de la pression suivant PP' par un segment PQ égal à $\frac{dp}{ds}$, porté dans le sens PP' si dp est positif, et en sens inverse si dp est négatif, on peut interpréter ainsi l'équation (5) :

La dérivée de la pression suivant une direction est égale à la projection de la force sur cette direction.

Prenons en particulier pour direction du déplacement celle de la force extérieure; en désignant par $\frac{dp}{dn}$ la dérivée correspondante, on a :

$$\frac{dp}{dn} = \rho F. \tag{6}$$

Comme ρF et dn sont positifs, dp est positif.

Or, lorsque l'on s'éloigne d'une surface de niveau, p augmente ou diminue suivant le côté de la surface où s'effectue le déplacement; et l'on peut alors ajouter :

Non seulement la force extérieure en un point est normale à la surface de niveau qui y passe, mais encore :

1° *Elle est dirigée du côté de cette surface où la pression augmente;*

2° *Elle a pour valeur la dérivée de la pression prise normalement à la surface de niveau suivant cette direction.*

Ce théorème renferme les équations (1), qui résultent aussi de l'application de la formule (5) aux trois directions des axes de coordonnées.

Ce théorème offre la même utilité que celui qui exprime les projections de la force sur la tangente et la normale principale dans le cas du mouvement d'un point matériel. Il permet d'écrire les équations de l'hydrostatique dans un système quelconque de coordonnées.

14. Discussion générale des équations de l'hydrostatique. — Nous devons actuellement reprendre les équations générales de l'hydrostatique et montrer ce qu'il faut faire pour en déduire une solution effective du problème proposé.

Nous supposerons X, Y, Z donnés en fonction de x, y, z; et nous voyons tout d'abord que ces trois fonctions ne sauraient être prises arbitrairement. Il faut en effet que

l'expression $X dx + Y dy + Z dz$ admette un facteur intégrant, ce qui exige que l'on ait :

$$(7) \quad X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

Supposons donc cette condition remplie, et elle est nécessaire pour que l'équilibre soit possible, alors il existera une fonction θ de x, y, z qui rend l'expression $\theta\,(X dx + Y dy + Z dz)$ une différentielle exacte dV, en sorte que :

$$(8) \qquad \theta\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dV,$$

où V est une fonction de x, y, z.

On sait qu'il existe une infinité de facteurs intégrants et qu'ils sont tous compris dans l'expression

$$\theta . f'(V),$$

où $f'(V)$ est la dérivée d'une fonction arbitraire de V; et l'on aura :

$$\theta f'(V)\,(X\,dx + Y dy + Z\,dz) = f'(V).dV = df(V).$$

Puisque, d'après l'équation (2), la densité ρ doit être un facteur intégrant, il faudra que pour une certaine détermination de la fonction $f(V)$ l'on ait :

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho = \theta . f'(V), \\ p = f(V). \end{cases}$$

D'ailleurs, quelle que soit la fonction $f(V)$, les équations (9) vérifient les équations (1), et par conséquent la solution générale de ces équations comporte une fonction arbitraire.

Nous remarquerons tout de suite que puisque $p =$ const., ou $f(V) =$ const. est l'équation des surfaces de niveau, l'équation de ces surfaces peut encore s'écrire :

$$V = \text{const.}$$

et comme la fonction V est déterminée, il en résulte que *les surfaces de niveau se trouvent parfaitement déterminées indépendamment de la fonction* $f(\mathrm{V})$.

Mais l'on ne connaît pas la loi de distribution de la densité dans le fluide, et l'on ne sait pas non plus rattacher à chaque surface de niveau une valeur déterminée de la pression.

Voilà donc deux problèmes qui restent à résoudre et dont la solution est uniquement subordonnée à la détermination de la fonction $f(\mathrm{V})$.

15. Condition complémentaire. — Il nous manque une condition susceptible de déterminer cette fonction inconnue. On trouve cette condition dans une *hypothèse complémentaire* que l'on fait sur les fluides, et qui consiste en ce que une relation donnée *à priori* existe toujours entre la pression et le volume, ou, ce qui revient au même, entre la pression et la densité.

Cette relation peut prendre une infinité de formes; chacune d'elles caractérise une classe particulière de fluides.

16. Solution complète du problème lorsque l'on connaît une condition complémentaire. — Remarquons d'abord que le fait de l'existence d'une relation complémentaire telle que

$$\rho = \mathrm{F}(p) \tag{10}$$

entraîne, eu égard aux équations (9), les relations :

$$\theta f'(\mathrm{V}) = \mathrm{F}(p) = \mathrm{F}[f(\mathrm{V})];$$

en sorte que θ est une simple fonction de V. Il en résulte que $\frac{d\mathrm{V}}{\theta}$ est une différentielle exacte, c'est à dire, en se reportant aux équations (8), que $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ est une différentielle exacte.

D'ailleurs, réciproquement, si $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte, on peut dire que $\theta = 1$ est un facteur intégrant; les équations (9) se réduisent à :

$$(11) \qquad \begin{cases} \rho = f'(V), \\ p = f(V), \end{cases}$$

ce qui montre que ρ est une simple fonction de p.

Supposons donc comme *à priori* cette relation (10), et prenons alors $\theta = 1$, ce qui est permis, ainsi que je viens de le montrer. Les équations (9) se réduisent à la forme (11).

Les équations (10) et (11) résolvent entièrement le problème, car on déduit des équations (11) :

$$\rho = f'(V) = \frac{dp}{dV},$$

et de l'équation (10) :

$$\frac{dp}{dV} = \rho = F(p),$$

d'où :

$$(12) \qquad V = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{F(p)} + \text{const.}$$

Cette équation donne une relation entre V et p, c'est à dire détermine la fonction $f(V)$. Le problème est ainsi entièrement résolu.

Si l'on veut connaître la distribution de la densité, la formule (10) y suffira, car elle donne ρ en fonction de p qui est une fonction connue de V, c'est à dire de x, y, z.

17. Détermination de la constante. — Il importe encore de faire observer que la solution comporte une constante arbitraire C. Pour la déterminer, on devra se donner la pression p_0 en un point x_0, y_0, z_0 du fluide, et la formule (12) deviendra :

$$(12)' \qquad V(x, y, z) - V(x_0, y_0, z_0) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{F(p)}.$$

18. Transmission des pressions. — Cherchons à nous rendre compte de ce qui se passerait au sein du fluide si l'on faisait varier cette constante C, ou si l'on supposait que la pression en x_0, y_0, z_0 fût devenue $p_0 + \delta p_0$.

En désignant par $p + \delta p$ la pression nouvelle au point (x, y, z), nous aurons, en vertu de l'équation (12)' :

$$\mathrm{V}(x, y, z) - \mathrm{V}(x_0, y_0, z_0) = \int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} \frac{dp}{\mathrm{F}(p)},$$

ou, en tenant compte encore de la relation (12)' :

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\mathrm{F}(p)} = \int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} \frac{dp}{\mathrm{F}(p)},$$

c'est à dire :

$$\frac{\delta p}{\mathrm{F}(p)} = \frac{\delta p_0}{\mathrm{F}(p_0)},$$

ou, en mettant en évidence les densités :

$$(13) \qquad \frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta p_0}{\rho_0}.$$

De là ce théorème :

Dans un fluide les variations de pressions se transmettent en chaque point proportionnellement à la densité.

19. Fluides incompressibles. — Liquides. — Ceci nous amène naturellement à distinguer deux cas fondamentaux dans la forme de la fonction $\mathrm{F}(p)$. Un premier cas sera celui où cette fonction se réduit à une constante, et où, par conséquent, la densité reste la même dans toute la masse. La densité et, par suite, le volume sont indépendants de la pression dans de pareils liquides, on les appelle pour ce motif *incompressibles*. Les corps naturels qui trouvent dans ces fluides l'image la plus parfaite de leurs propriétés sont ceux que l'on appelle vulgairement des liquides. En se

reportant à la formule (13), puisque dans de pareils fluides on a $\rho = \rho_0$, il en résulte que $\delta p = \delta p_0$, c'est à dire :

Dans les fluides incompressibles les variations de pression se transmettent intégralement.

20. Fluides compressibles. — Gaz. — Pour toute autre détermination de la fonction F, la densité et le volume varient avec la pression; le fluide est alors compressible.

Le cas le plus important, et en même temps le plus simple, est celui où la densité est proportionnelle à la pression

$$\rho = a.p.$$

La constante a caractérise chaque fluide compressible de cette famille. Les corps vulgairement appelés *gaz,* pourvu qu'ils se trouvent éloignés de leur point de liquéfaction, sont ceux dont cette hypothèse représente le mieux les propriétés.

Dans les fluides compressibles, les variations de pression ne sauraient se transmettre intégralement.

Il y a cependant un cas où cette transmission aurait lieu, c'est celui où la pression serait constante dans toute la masse.

Mais il faudrait alors qu'aucune force extérieure ne vînt agir sur le fluide, car les équations (1) donnent, puisque p est constant :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Ce cas se trouve fort à peu près réalisé par une masse gazeuse enfermée dans une enceinte suffisamment petite pour que l'on puisse négliger l'action de la pesanteur. Il existe même une expérience classique qui a pour objet de démontrer dans ce cas l'égale transmission des pressions.

21. Principe de Pascal. — C'est au principe de la transmission des pressions dans un fluide incompressible que se

rattache le principe de Pascal. Deux surfaces planes S et S', faisant partie de la paroi qui limite le fluide, et que nous supposerons contenues dans deux surfaces de niveau, éprouvent les *pressions totales*

$$S.p \quad \text{et} \quad S'.p',$$

où p et p' sont les *pressions* relatives à chacune des deux surfaces de niveau. Si l'on exerce de l'extérieur du fluide sur la première surface une action équivalente à une variation $S\,\delta p$ de la *pression totale,* il en résultera sur l'autre surface une variation $S'\,\delta p$ de la *pression totale,* puisque la variation δp se transmet intégralement.

Si la surface S est 100 fois plus petite que la surface S', la *pression totale* supportée par la surface S' sera 100 fois plus grande que la *pression totale* exercée sur la surface S.

C'est le principe tel que Pascal lui-même l'a énoncé; il a servi de base à l'invention de la presse hydraulique, dont l'usage si répandu s'étend jusqu'à certains appareils de précision destinés à enregistrer de fortes pressions.

Nous avons supposé les deux surfaces S et S' situées chacune dans une surface de niveau. Mais toute surface plane S peut être décomposée en bandes infiniment étroites par des surfaces de niveau infiniment voisines; sur chacune de ces bandes on peut regarder la première par unité de surface comme constante, et répéter pour chacune d'elles le raisonnement précédent. On arrive aux mêmes conséquences.

Ajoutons enfin que le principe de Pascal s'étend aux fluides compressibles, lorsque le premier est ou peut être considéré comme constant dans toute la masse.

22. Remarques générales sur les surfaces limites. — Le problème général que nous avons résolu, à savoir la détermination de la pression en chaque point, contient la solution

de plusieurs questions, dont deux sont particulièrement importantes. La première consiste à déterminer l'action que le fluide exerce sur une surface solide finie qui le limite. Nous traiterons seulement dans un cas particulier cette première question, à propos des liquides pesants. La seconde concerne les surfaces limites du fluide, quand ces surfaces le séparent non plus d'un corps solide, mais d'un autre fluide, ou même du vide absolu. Dans ce dernier cas, la surface porte le nom de *surface libre.*

Toute surface libre est une surface de niveau; car, puisqu'il n'y a pas de solide ni de fluide balançant extérieurement la pression que le fluide exerce de l'intérieur sur un élément de cette surface libre, il faut que cette pression soit nulle. La surface libre appartient donc à la surface de niveau :

$$p = 0.$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse de la surface de séparation de deux fluides. Il est clair qu'en chaque point de cette surface la pression sera la même pour les deux fluides.

Si nous appelons p la valeur de la pression en un point P de la surface de séparation, et dp la variation de cette pression qui correspond à un déplacement $PP' = ds$ sur cette surface, θ et θ_1 les angles que font avec PP' les forces qui agissent sur le point P considéré successivement comme faisant partie du premier et du second fluide, ρF, $\rho_1 F_1$ ces forces elles-mêmes, on doit avoir d'après la formule fondamentale (5) :

$$\frac{dp}{ds} = \rho F \cos\theta, \quad \frac{dp}{ds} = \rho_1 F_1 \cos\theta_1,$$

d'où :

$$\rho F \cos\theta = \rho_1 F_1 \cos\theta_1.$$

Ceci exprime que les deux forces ρF et $\rho_1 F_1$ ont même

projection sur toute direction prise dans un plan tangent en P à la surface de séparation; c'est à dire que ces forces se projettent suivant le même segment sur ce plan tangent, ou encore :

La différence géométrique des deux forces ρF, $\rho_1 F_1$ *qui agissent sur le point* P, *considéré comme faisant partie successivement des deux fluides, est parallèle à la normale en* P *à la surface de séparation.*

Pour que la surface de séparation soit une surface de niveau dans les deux fluides, il est donc nécessaire et suffisant que l'on sache *à priori* qu'en tout point P de cette surface la direction de la force $\rho_1 F_1$ est la même que celle de la force ρF. Ce fait se présente en particulier si les deux fluides sont soumis à la même force extérieure, par exemple, la pesanteur, et l'attraction par les mêmes centres, ou en vertu d'un même potentiel.

Enfin, ce fait se produira encore si l'un des fluides n'est soumis à aucune force.

Il est clair que ce qui précède ne doit pas s'étendre aux gaz; ils se diffusent les uns dans les autres quand on les met en présence. Mais les liquides en contact entre eux ou avec un gaz suivent la loi précédente.

Nous écartons ici tout effet dû aux variations de température, ou aux actions chimiques.

Nous n'ajouterons rien aux généralités qui concernent les formules de l'hydrostatique, et nous allons aborder l'étude spéciale des différents problèmes particuliers.

Statique des fluides pesants.

23. La pesanteur doit être considérée comme gardant une direction constante, lorsqu'il s'agit de déplacements peu considérables à la surface de la terre. Les surfaces de niveau seront donc des plans horizontaux. Les surfaces

libres, les surfaces de contact de deux fluides pesants seront des plans horizontaux, pourvu, bien entendu, qu'aucune autre force n'intervienne.

Si nous comptons positivement vers le haut les distances verticales z des plans horizontaux au-dessus d'un plan horizontal fixe, en appliquant la formule (6) du numéro 13, et remarquant que la force agit dans le sens des z décroissants, on aura :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \tag{1}$$

ρ désignant la densité et g l'accélération constante due à la pesanteur. Nous distinguerons deux cas, suivant que nous aurons affaire à un fluide incompressible ou à un fluide compressible.

Fluides incompressibles pesants.

24. Dans le cas des liquides, la formule (1) donne par intégration, en remarquant que ρ est constant :

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z); \tag{2}$$

on sait qu'il faut, pour la détermination complète du problème, se donner la pression p_0 qui correspond au niveau z_0.

La formule (2) est susceptible d'une interprétation très simple. Remarquons d'abord que des éléments superficiels égaux décrits autour d'un même point P éprouvent la même pression totale.

Considérons alors un cylindre découpant dans deux plans horizontaux z et z_0 des éléments ω et ω_0, évidemment égaux et entourant l'un le point P, l'autre un point P_0. Les pressions totales sur ces deux éléments se représenteront par $p\omega$ et $p_0\omega_0$, ou $p_0\omega$ puisque $\omega_0 = \omega$; leur différence $(p - p_0)\,\omega$ s'exprimera, d'après la formule (2), sous la forme :

$$\rho g (z_0 - z)\,\omega.$$

En sorte que l'on peut énoncer le théorème suivant :

La différence des pressions totales sur deux éléments superficiels égaux, infiniment petits, est égale au poids d'un cylindre de liquide qui aurait pour base l'un des éléments et pour hauteur leur distance verticale.

25. Plan de charge. — La formule (2) où l'on fait $p = 0$ donne :

$$z_1 = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}. \tag{3}$$

Il existe donc un plan horizontal z, tel que si le liquide l'atteint, la pression y est nulle. D'ailleurs en introduisant cette valeur dans l'équation (2), on trouve :

$$p = \rho g\,(z_1 - z), \tag{2)'$$

ce qui prouve que le liquide ne peut s'élever au-dessus de ce niveau. On remarquera sur la formule (2)' que tout se passe, au point de vue des pressions, comme si le liquide avait une *surface libre* dans le plan z_1. Ce plan a reçu le nom de *plan de charge*.

Dans la réalité le plan de charge n'est jamais atteint par le liquide, car sa surface prétendue libre n'est autre que celle qui le sépare de l'air ambiant, ou de tout autre gaz avec lequel il est en contact et dont la pression n'est jamais nulle.

Si l'on désigne par ζ la distance au plan de charge, comptée vers le bas, d'un point quelconque du fluide, la pression en ce point s'exprime par la formule

$$p = \rho g \zeta. \tag{2)'$$

On voit que la pression sur un élément infiniment petit quelconque se représente par le poids d'un cylindre de liquide ayant pour base l'élément et pour hauteur sa distance au plan de charge.

C'est une forme particulière du théorème précédemment énoncé.

26. Pression sur une paroi. — Profitons d'un résultat si simple pour essayer de résoudre un problème que nous n'avons pas traité dans le cas général :

Trouver l'action du fluide sur une paroi solide.

Prenons le cas d'une surface courbe quelconque. Considérons un point M sur cette surface, un élément ω décrit autour du point M, et soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en M dirigée vers l'extérieur du liquide. On a pris pour axes une verticale $O\zeta$ dirigée vers le bas, et deux horizontales $O\xi$, $O\eta$ rectangulaires dans le plan de charge. Les projections de la pression totale et ses moments seront respectivement :

$$p\omega\alpha, \quad p\omega\beta, \quad p\omega\gamma, \quad p\omega(\eta\gamma - \zeta\beta), \quad p\omega(\zeta\alpha - \xi\gamma), \quad p\omega(\xi\beta - \eta\alpha).$$

Si l'on prend la somme de ces projections et de ces moments, on trouve pour les six coordonnées du système de forces qui s'exerce sur la paroi, considérée comme un corps solide :

$$A = \iint p\alpha . \omega, \quad B = \iint p\beta . \omega, \quad C = \iint p\gamma . \omega,$$
$$L = \iint p\,(\eta\gamma - \zeta\beta) . \omega, \quad M = \iint p\,(\zeta\alpha - \xi\gamma) . \omega,$$
$$N = \iint p\,(\xi\beta - \eta\alpha) . \omega.$$

Ces équations sont applicables au cas le plus général de l'hydrostatique. Mais ici on connaît p en fonction de ζ, en sorte que l'on a, eu égard à l'équation (2)' :

$$A = \rho g \iint \zeta\alpha\omega, \quad B = \rho g \iint \zeta\beta\omega, \quad C = \rho g \iint \zeta\gamma\omega,$$
$$L = \rho g \iint \zeta\,(\eta\gamma - \zeta\beta)\,\omega, \quad M = \rho g \iint \zeta\,(\zeta\alpha - \xi\gamma)\,\omega,$$
$$N = \rho g \iint \zeta\,(\xi\beta - \eta\alpha)\,\omega.$$

Les intégrales doivent être étendues à tous les éléments de la paroi pressée.

Le système fini de forces qui est équivalent au système intégral de toutes les pressions ne se réduit pas généralement à une seule force. Il faudrait pour cela que l'équation

$$AL + BM + CN = 0$$

fût vérifiée.

27. Cas d'une paroi plane. — Prenons le cas simple d'une paroi plane; toutes les pressions sont parallèles et se composent en une seule, appliquée normalement en un de ses points Ω. Le point Ω est le *centre de pression*. Quant à la pression totale, elle est évidemment la somme des pressions élémentaires.

Adoptons pour axes :

Ox, intersection du plan de la paroi avec le plan de charge;

Oy, perpendiculaire à Ox dirigée vers le bas;

Oz, perpendiculaire au plan de la paroi.

Appelons θ l'angle que fait Oy avec sa projection horizontale, angle qui mesure le dièdre formé par la paroi et le plan de charge. On aura évidemment, ζ conservant sa signification précédente :

$$\zeta = y \sin \theta,$$

et la pression s'exprime ainsi :

$$p = \rho g \sin \theta . y;$$

d'où, pour la somme des pressions :

$$P = \iint p\omega = \rho g \sin \theta \iint y\omega.$$

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point Ω, centre de pression. La théorie ordinaire des forces parallèles nous

donne :

$$P x_1 = \iint p x \omega = \rho g \sin\theta \iint x y \omega,$$
$$P y_1 = \iint p y \omega = \rho g \sin\theta \iint y^2 \omega,$$

c'est à dire :

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{\iint x y \omega}{\iint y \omega}, \\ y_1 &= \frac{\iint y^2 \omega}{\iint y \omega}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules montrent que *le centre de pression coïncide avec le centre de percussion de la paroi, lorsque l'on prend pour axe l'intersection de son plan avec le plan de charge.*

28. Ainsi, dans le cas du cercle on trouve :

1° Que la pression totale est égale au poids d'un cylindre de liquide ayant pour base le cercle et pour hauteur la distance de son centre au plan de charge;

2° Que le point Ω est sur le diamètre perpendiculaire à l'axe, au delà du centre, et à une distance du centre égale à une troisième proportionnelle entre la moitié du rayon et la distance du centre à l'axe. En sorte que le point Ω est le symétrique, par rapport au centre du cercle, du pôle de l'axe par rapport à un cercle concentrique au précédent et de rayon moitié.

Le cas d'une paroi elliptique est identique au précédent. On trouve :

1° Que la pression totale est égale au poids d'un cylindre de liquide qui aurait l'ellipse pour base et pour hauteur la distance du centre au plan de charge;

2° Que le centre de pression est le symétrique par rapport

au centre de l'ellipse du pôle de l'axe par rapport à une ellipse homothétique et concentrique à la première, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$.

29. On peut ramener la recherche du centre de pression à celle d'un centre de gravité.

Considérons en effet un point M de la paroi plane et élevons une perpendiculaire à cette paroi, dont la longueur MM' soit égale à la distance du point M au plan de charge. Le lieu du point M' est un plan, en sorte que si le point décrit toute la paroi, la droite MM' engendre un cylindre tronqué dont la paroi elle-même constitue la section droite de base. Si l'on plaçait verticalement ce cylindre, supposé rempli de liquide, chaque élément ω de sa base supporterait une pression P, identique d'une part avec la pression que cet élément subit effectivement dans le liquide, et d'autre part aussi identique avec le poids de la colonne du cylindre tronqué qui correspond à l'élément. La résultante de ces pressions doit donc passer par le centre de gravité du cylindre tronqué, et l'on voit alors que le *centre de pression n'est autre que la projection sur le plan de la paroi du centre de gravité du cylindre tronqué construit comme on l'a déjà expliqué.*

Cette remarque établit un nouveau lien entre le problème des centres de pression et les théories déjà développées, en montrant en même temps qu'il existe une relation étroite entre la recherche des centres de percussion et celle des centres de gravité.

On peut, en se plaçant à ce point de vue, chercher la pression sur une paroi rectangulaire ABCD dont deux côtés AD et BC sont horizontaux. Si l'on élève les perpendiculaires AA' et BB' respectivement égales aux distances des horizontales AD et BC au plan de charge, le tronc

cylindrique correspondant peut être considéré comme un prisme droit ayant ses arêtes horizontales et parallèles à AD et dont la base est le trapèze AB B'A'.

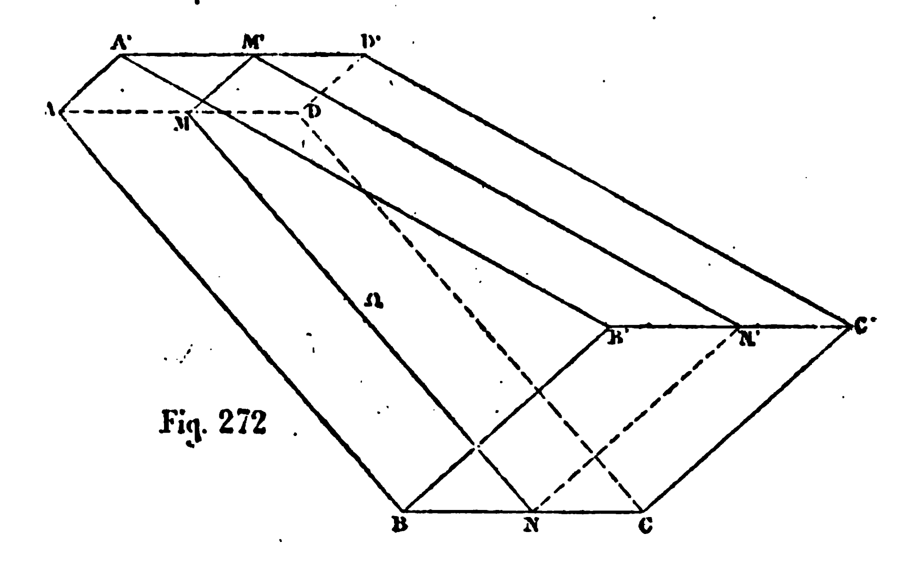


Fig. 272

Si l'on considère la section droite MN N'M', équidistante des bases, on voit que le centre de gravité de cette section est aussi celui du prisme. Il suffit donc de trouver la projection sur MN du centre de gravité du trapèze MN N'M'. On trouve ainsi que Ω divise MN dans le rapport :

$$\frac{\Omega M}{\Omega N} = \frac{2\,\overline{BB'} + \overline{AA'}}{2\,\overline{AA'} + \overline{BB'}}.$$

30. Corps flottants. — Principe d'Archimède. — L'étude de l'action du liquide sur une paroi contient celle des corps flottants.

Mais dans ce cas les conditions du problème conduisent à une simplification remarquable qui consiste en ce que les pressions se composent dans une force verticale unique.

Conservons les notations du numéro (26). Les compo-

santes des pressions suivant une même horizontale se détruisent deux à deux comme il est facile de le montrer.

En effet, un cylindre parallèle à l'horizontale ξ, par exemple, et circonscrit à l'élément ω, ayant pénétré dans le corps flottant suivant cet élément, doit en sortir suivant un second élément ω', qu'il découpe dans la surface immergée. Les deux éléments ω et ω' sont sur le même niveau, et par suite la pression p par unité de surface y est la même.

Les composantes suivant $O\xi$ des deux pressions totales seront :

$$\alpha p \omega, \quad \alpha' p \omega',$$

en désignant, comme au numéro (26), par α et α' les cosinus des angles de ces pressions avec l'axe $O\xi$. On remarquera que ces deux cosinus sont nécessairement de signes contraires; de plus, si nous appelons σ la section droite du cylindre, comme σ est la projection des aires ω et ω', on aura *en valeur absolue :*

$$\alpha\omega = \sigma, \quad \alpha'\omega' = \sigma,$$

en sorte que les deux composantes précédentes ont la même valeur absolue $p\sigma$; elles sont d'ailleurs opposées l'une à l'autre, et puisqu'elles ont même ligne d'action, leur effet sur le corps solide est nul. Toutes les composantes horizontales des pressions totales élémentaires se détruisent ainsi deux à deux, et le corps reste soumis seulement à leurs composantes verticales.

Reprenons alors le même élément ω que tout à l'heure, et construisons de même un cylindre vertical infiniment petit pénétrant dans le corps suivant l'élément. Soit σ sa section droite. Le cosinus γ de l'angle que fait avec la verticale la pression totale supportée par l'élément a pour valeur

$$\pm \frac{\sigma}{\omega},$$

selon que la projection verticale de la pression est dirigée vers le bas ou vers le haut. Cette projection verticale se représente donc par

$$\pm p\sigma,$$

suivant le cas.

Or, envisageons une verticale traversant l'élément ω; elle peut traverser la surface du corps immergé en plusieurs points que nous supposerons rangés par ordre de profondeur croissante, M, M_1, M_2, etc. Je désignerai par $p, p_1, p_2, \ldots$ les pressions aux niveaux correspondants; et par $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ les éléments que le cylindre vertical infiniment petit découpe autour de ces points. Supposons, pour fixer les idées, qu'en se déplaçant à partir de M dans le sens $O\zeta$ on sorte de la surface; on y rentrera en M_1, pour en sortir en M_2, etc. La composante verticale de la pression totale sera donc négative pour le premier élément ω, positive pour ω_1, etc., et toutes ces forces qui ont même ligne d'action se composeront en une seule représentée par la somme :

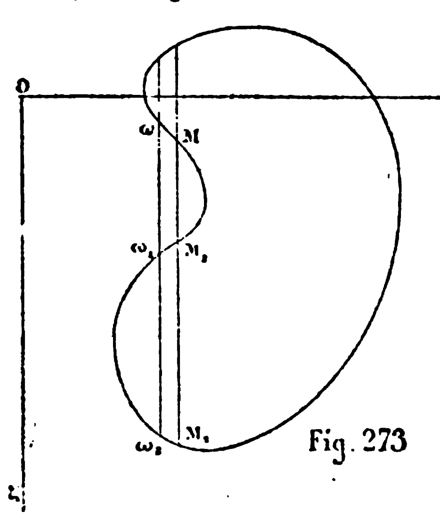


Fig. 273

$$-p\sigma + p_1\sigma - p_2\sigma, \ldots = (-p + p_1 - p_2 \ldots)\,\sigma.$$

Soient $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les distances des points M, M_1, M_2, ... au plan de charge, on a :

$$p = \rho g\zeta, \quad p_1 = \rho g\zeta_1, \ldots,$$

d'où, pour la somme des composantes verticales des pres-

sions élémentaires :

$$\rho g\,(-\zeta+\zeta_1,\zeta_2,\ldots)\,\sigma=-\rho g\,[\zeta\sigma+(\zeta_2-\zeta_1)\,\sigma+\ldots].$$

On reconnaît dans la quantité entre parenthèses la somme des cylindres que notre cylindre infiniment petit vertical découpe dans la portion immergée du corps flottant.

Le produit de cette somme par ρg représente donc le poids de ce même volume si l'on supposait la matière du corps flottant qui le compose transmutée en liquide. Enfin, comme ce produit est essentiellement positif, nous devons en conclure que la somme de toutes les composantes élémentaires que nous avons considérées donne une force verticale dirigée vers le haut.

En faisant maintenant la même opération pour tous les éléments de la surface immergée et ajoutant les résultats, nous parviendrons à une force unique verticale dirigée vers le haut, représentée par le poids d'un volume de liquide égal au volume immergé du corps.

La théorie des centres des forces parallèles nous montre de plus que la résultante de toutes ces forces passe au centre de gravité du volume immergé.

Le liquide dont le volume immergé tient la place s'appelle *volume déplacé* ou *déplacement*. On peut dire alors qu'*un corps plongé dans un liquide éprouve une poussée verticale représentée par le poids du volume déplacé du liquide*, et *appliquée au centre de gravité de ce volume.*

C'est en cela que consiste le principe d'Archimède.

31. Extension aux fluides pesants quelconques. — Le principe d'Archimède, comme on a pu le voir, découle de ce fait que dans les liquides pesants les surfaces de niveau sont des plans horizontaux. Or, ce fait se présente dans le cas de fluides pesants quelconques. On doit donc étendre aux gaz le principe d'Archimède, en ayant soin de remar-

quer que dans ce cas le volume de fluide déplacé n'est plus homogène, mais que la densité varie avec le niveau, et que par conséquent le point d'application de cette poussée ne sera pas nécessairement le centre de gravité du volume immergé du corps, comme dans le cas des liquides.

32. REMARQUE. — Soient U le volume du corps et d sa densité, V le volume déplacé et ρ la densité du liquide.

Pour qu'un corps flottant sur un liquide soit en équilibre, il faut que la poussée détruise son poids. Il faut donc que le centre de gravité G du corps et le *centre de carène,* c'est à dire le centre de gravité du volume déplacé, soit sur une même verticale.

De plus on doit avoir :

$$V\rho = Ud,$$

c'est à dire :

$$V = \frac{d}{\rho} U.$$

Or il est clair que V doit être au plus égal à U, ce qui exige que $d \leqq \rho$.

Si $d < \rho$, le corps pourra flotter et une partie émergera; car alors $V < U$.

Si $d = \rho$, le corps sera en équilibre dans toutes les positions dans le liquide, pourvu qu'il y soit entièrement plongé.

Enfin si $d > \rho$, le corps tombe au fond du liquide.

33. Forme d'un liquide pesant animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical. — Les équations générales qui ont été données plus haut sont applicables au cas où les forces agissantes proviennent d'un mouvement propre à toute la masse. On sait en effet que les formules ordinaires de la statique conviennent aux cas d'équilibre

relatif, pourvu que l'on tienne compte des forces fictives que le théorème de Coriolis apprend à introduire.

Supposons donc qu'une masse liquide tourne autour d'un axe vertical, un point M de la masse sera sollicité par son poids, mg, et par la force centrifuge, $m\omega^2 r$, où r désigne la distance du point M à l'axe, et ω la vitesse angulaire constante.

Nous pouvons représenter la force centrifuge par un segment MC égal à r, quitte à représenter le poids par un segment MG égal à $\frac{g}{\omega^2}$. La force sera représentée par la résultante MP de ces deux segments. Les surfaces de niveau sont évidemment de révolution autour de l'axe de rotation Oz, et NQ représente la sous-normale à la courbe méridienne qui passe en M, attendu que MP doit être normale à la surface de niveau. Mais les deux triangles QNM, GMP sont égaux, car tous leurs angles sont égaux et que de plus $PG = MC = r$;

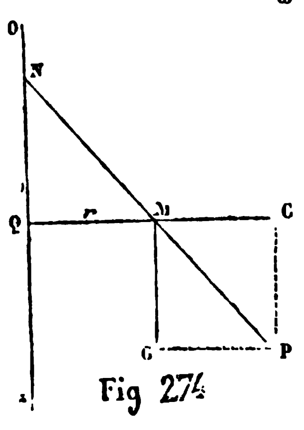


Fig 274

donc la sous-normale NQ, qui est égale à $MG = \frac{g}{\omega^2}$, est constante.

Les surfaces de niveau sont ainsi des paraboloïdes de révolution, et comme leurs méridiennes sont des paraboles qui ont même sous-normale, tous ces paraboloïdes de niveau ne sont autres qu'un seul et même paraboloïde déplacé suivant son axe.

Reste à trouver la pression en chaque point. Puisqu'elle est la même sur chaque paraboloïde de niveau, il suffit de la chercher aux sommets de ces paraboloïdes.

Soit n la distance, comptée positivement vers le bas, du

sommet d'un paraboloïde S à une origine fixe prise sur l'axe. La pression est une simple fonction de n; or si l'on se déplace sur l'axe, normalement par conséquent à la surface de niveau, la dérivée $\frac{dp}{dn}$ de la pression se représente par la force extérieure, laquelle se réduit sur l'axe à la pesanteur ρg. On a donc :

$$\frac{dp}{dn} = \rho g,$$

d'où :

$$p - p_0 = \rho g (n - n_0).$$

Or, $(n - n_0)$ représente le déplacement parallèle à l'axe qu'a subi le paraboloïde S_0 pour venir coïncider avec le paraboloïde S. Si l'on donne à ce déplacement vertical le nom de *différence de niveau,* ainsi qu'on le fait dans le cas des plans horizontaux, la formule précédente conduit au même énoncé que dans le cas des liquides au repos. Ainsi, ce théorème : « Les différences des pressions sur deux éléments égaux se représentent par le poids d'un cylindre de liquide ayant pour base l'un de ces éléments et pour hauteur leur différence de niveau, » s'étend au cas d'un liquide pesant animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical.

L'exemple de cette extension n'est pas particulier au problème qui nous occupe, on le retrouvera chaque fois que les surfaces de niveau proviendront du déplacement d'une même surface suivant une même direction.

Gaz pesants. — Atmosphère.

34. Lorsqu'il s'agit de fluides compressibles pesants, la formule (1) de la page 429 conduit à des conséquences légèrement différentes. Dans ce cas, en effet, la densité ρ varie

avec la pression. Par exemple, on a :

(1) $$\rho = ap,$$

et par suite :

$$\frac{dp}{p\,dz} = -ag;$$

on en déduit :

(2) $$\log \frac{p}{p_0} = -ag(z - z_0),$$

ce qui prouve que les résultats ne diffèrent de ceux que l'on a rencontrés pour les liquides qu'en ce que p s'y trouve remplacé par son logarithme.

35. Mais dans cette formule on attribue à la pesanteur une grandeur et une direction invariables; on suppose constante la température, ou du moins on n'en tient pas compte, et pour ces raisons la formule (2) ne peut être appliquée à l'atmosphère.

La pesanteur est dirigée vers le centre C de la Terre, supposée sphérique; elle varie en raison inverse du carré de la distance à ce centre.

Les surfaces de niveau sont donc des sphères concentriques au globe, et si R est la longueur du rayon terrestre, z la distance d'un point M à la surface de la terre, en sorte que $z + R$ soit sa distance au centre C, les surfaces de niveau auront pour équation $z =$ const. Il faut en conclure que la pression sera une fonction de z. Or, si l'on se déplace sur le rayon terrestre vers le centre, c'est à dire suivant la force, z diminue et la dérivée $-\frac{dp}{dz}$ a pour valeur la force extérieure $\frac{f\rho}{(z+R)^2}$, on a donc :

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{f\rho}{(z+R)^2}.$$

Maintenant, si θ est la température, α le coefficient de dilatation de l'air, on a :

$$\rho = \frac{ap}{1 + \alpha\theta},$$

d'où :

$$-\frac{dp}{p\,dz} = \frac{fa}{1 + \alpha\theta}\,\frac{1}{(z + R)^2}.$$

Pour exprimer la constante f, on remarquera que $\frac{f}{R^2} = g$ est l'intensité de la pesanteur à la surface du sol, ce qui donne :

$$-\frac{dp}{p} = \frac{ga}{1 + \alpha\theta} \cdot \frac{dz}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2}.$$

36. On ne connaît pas la loi suivant laquelle θ varie avec l'altitude. Mais α est petit, θ varie peu, du moins on le suppose, et le coefficient $\frac{ga}{1 + \alpha\theta}$ peut être regardé comme constant. En intégrant, et appelant p_0 la pression à la surface du sol, on trouve :

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{ga}{1 + \alpha\theta}\,\frac{z}{1 + \frac{z}{R}};$$

on a du reste, en supposant $\frac{z}{R}$ petit :

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{R}} = 1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots,$$

d'où :

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{ga}{1 + \alpha\theta}\left\{ z - \frac{z^2}{R} + \frac{z^3}{R^2} - \frac{z^4}{R^3} + \dots \right\}.$$

En supposant $\frac{z}{R}$ négligeable, on ferait une première approximation, qui est précisément celle que nous avons

regardée comme insuffisante. Une seconde approximation consistera à conserver le terme en $\frac{z^2}{R}$ et à négliger tous ceux qui suivent vers la droite; on trouve ainsi :

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{ga}{1+\alpha\theta} z \left(1 - \frac{z}{R}\right).$$

On se sert de cette formule pour mesurer les hauteurs à l'aide du baromètre. On se transporte en deux points A et A_1, on observe et corrige des effets de la chaleur les hauteurs du baromètre, dont le rapport est égal à celui des pressions p et p_1 en A et A_1; on a ainsi, z et z_1 étant les altitudes de A et A_1 :

$$\log \frac{p_1}{p} = -\frac{ga}{1+\alpha\theta} z_1 \left(1 - \frac{z_1}{R}\right) + \frac{ga}{1+\alpha\theta} z \left(1 - \frac{z}{R}\right).$$

Soit z' la différence d'altitude des deux stations, on a $z_1 - z = z'$, d'où, pour l'équation qui donne z' :

$$\log \frac{p_1}{p} = -\frac{gaz'}{1+\alpha\theta}\left[1 - \frac{z'+2z}{R}\right].$$

On prend pour θ la moyenne des températures aux deux stations. Quant aux constantes g et a, on les connaît d'avance: on effectue sur g la correction due à la latitude.

On doit remarquer que cette formule suppose que l'atmosphère est en repos : on l'appliquera donc avec d'autant plus d'exactitude que l'air sera plus calme.

CHAPITRE II

HYDRODYNAMIQUE.

1. L'hydrodynamique a pour objet l'étude du mouvement des fluides. Soient (x, y, z) les coordonnées rectangulaires à l'époque t d'un point M de la masse d'un fluide en mouvement, et u, v, w les projections sur les axes de sa vitesse, on aura évidemment :

$$(1) \qquad u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Si l'on envisage la masse fluide à l'époque t, la grandeur et la direction de la vitesse de chaque point sont des fonctions de ses coordonnées actuelles. Mais ces fonctions varient d'un instant à l'autre pour un même point de l'espace, du moins en général, en sorte que l'on devra considérer u, v, w comme des fonctions parfaitement déterminées de x, y, z et t.

Le problème se trouve alors ramené à la détermination de ces fonctions, et une fois qu'on les aura trouvées, les équations (1) feront connaître le mouvement d'un point quelconque de la masse fluide.

2. Équations qui déterminent le régime. — La détermination de u, v, w constitue la recherche du *régime* du mouvement du fluide.

Pour trouver les équations propres à cette détermination,

il suffira de remarquer que la force d'inertie relative au point M, et qui a pour projections sur les axes :

$$-\rho\frac{d^2x}{dt^2},\quad -\rho\frac{d^2y}{dt^2},\quad -\rho\frac{d^2z}{dt^2},$$

peut être représentée à l'aide des dérivées *totales* de u, v, w, puisque l'on a, en vertu des équations (1) :

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{dw}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On se rappellera alors que les équations de l'hydrostatique s'étendent au cas du mouvement, pourvu que l'on fasse figurer parmi les forces extérieures les forces d'inertie, et les équations :

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho X-\rho\frac{d^2x}{dt^2},\quad \ldots$$

que l'on obtiendrait ainsi, deviennent alors, grâce à la remarque précédente :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{dv}{dt}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{dw}{dt}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

3. Équation de continuité. — Ces équations n'expriment pas la continuité du fluide, c'est à dire l'absence de vide au sein de la masse en mouvement. Considérons un parallélipipède rectangle ABCD A'B'C'D' infiniment petit, dont les arêtes soient parallèles aux axes, et dont les coordonnées du sommet A le plus rapproché de l'origine soient x, y, z.

Appelons a, b, c les longueurs infiniment petites des arêtes AB, AC, AD, et ρ la densité au point A à l'époque t.

La masse du fluide qui, à l'époque t, remplit le parallélipipède, a pour valeur :

$$\rho\, abc.$$

Or, la densité ρ varie généralement d'un point à l'autre, et de plus, pour un même point, peut varier avec le temps : donc ρ est une fonction explicite de x, y, z, t. Au bout du temps dt, la densité au point A s'est accrue de sa différentielle due à la variation du temps, elle est devenue $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt\right)$, et la masse du fluide qui à l'époque $t + dt$ remplit le parallélipipède, a alors pour expression :

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) abc,$$

en sorte que dans le temps dt cette masse s'est accrue de la quantité :

$$abc \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dt.$$

Mais nous avons une seconde manière d'évaluer la variation de masse du fluide intérieur au parallélipipède : il suffit d'évaluer la masse qui a pénétré dans ce solide pendant le temps dt, et celle qui en est sortie, et de faire la différence.

Par la face ACB'D, dont l'étendue est mesurée par le produit bc, pénètre une masse représentée par l'expression

$$bc.\rho u.dt.$$

La face opposée A'C'BD' donne au contraire passage à une masse égale à cette expression, augmentée de sa différentielle due à la variation a de l'abscisse x, ce qui donne :

$$bc\left(\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x}\, a\right) dt.$$

Mais la première expression représentant une masse qui

entre dans le parallélipipède, l'autre exprime une masse qui en sort, et leur différence :

$$-abc\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dt,$$

représente une masse résiduelle restée intérieure au parallélipipède. Les deux autres couples de faces opposées donnent deux termes analogues, ce qui par addition nous donne :

$$-abc\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dt,$$

pour la variation de la masse du fluide intérieur au parallélipipède. S'il n'y a pas de discontinuité dans ce fluide, cette variation doit être identique à celle qui résulte de la variation de la densité, et nous avons ainsi, en égalant ces expressions différentes :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{3}$$

4. Conditions complémentaires [1]. — Les équations (2) et (3) ne suffisent pas pour déterminer les cinq fonctions u, v, w, p, ρ des quatre variables x, y, z, t. Pour compléter la détermination, il faut introduire une condition nouvelle définissant d'une manière plus spéciale la nature du liquide.

Si, par exemple, le fluide est incompressible, dans le sens le plus général du mot, la densité doit rester constante pour un même point de la masse du fluide, et ρ est une fonction dont la dérivée totale par rapport au temps doit être nulle. On a alors :

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

---

[1] Voir sur les conditions supplémentaires un mémoire de M. Bjerkness, au tome IV du journal *Acta Mathematica*, publié par M. Mittag-Leffler, chez M. Hermann, libraire.

ou, eu égard aux équations (1) :

$$(4)\qquad u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0.$$

Cette hypothèse réduit l'équation (3) à la forme :

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

et l'on a alors dans les équations (2), (4) et (5) le nombre de conditions nécessaires pour déterminer les cinq fonctions.

L'hypothèse la plus ordinaire et celle qui trouve le plus d'applications, consiste à introduire comme équation complémentaire une relation connue *à priori* entre la densité et la pression. D'ailleurs, il est facile de se rendre compte du degré de particularisation de cette hypothèse.

Supposons en effet que, par l'introduction de conditions complémentaires convenables, on ait entièrement déterminé les fonctions et les constantes du problème ; les quantités u, v, w, p, ρ seront *cinq* fonctions des *quatre* variables x, y, z, t ; et il existera par conséquent au moins une relation entre u, v, w, p et ρ :

$$F(u, v, w, p, \rho) = 0.$$

L'hypothèse spéciale que nous introduisons consiste donc supposer que la vitesse ne figure pas dans cette relation, que l'on peut supposer donnée *à priori*. Nous prendrons donc comme cinquième équation, ou comme équation complémentaire, une équation de la forme :

$$(6)\qquad \rho = F(p),$$

et nous avons aussi dans les équations (2), (3), (6) les cinq relations voulues entre nos cinq fonctions u, v, w, p et ρ.

5. Détermination des constantes ou des fonctions arbitraires. — L'intégration de ces équations simultanées intro-

duira certaines constantes ou fonctions arbitraires qu'il s'agira de déterminer.

On y parviendra par la considération des données initiales et des surfaces limites.

Supposons qu'à un instant t le fluide soit limité par une surface A, qui variera généralement avec le temps. L'équation de cette surface sera généralement de la forme :

$$A = 0,$$

où A représentera une fonction de x, y, z, t. On admet qu'un point du fluide situé sur cette surface doit s'y mouvoir tangentiellement, en sorte que l'on doit avoir, soit identiquement, soit en vertu de l'équation $A = 0$:

$$\frac{\partial A}{\partial x} u + \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{\partial A}{\partial z} w + \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

On remarquera que si l'on forme les équations des caractéristiques ξ de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dt}{1}, \quad dA = 0,$$

on tombe précisément sur les équations (1); en sorte que si a, b, c sont les trois intégrales des équations (1), la fonction A doit pouvoir s'exprimer à l'aide de a, b, c seulement, et être de cette forme :

$$A = f(a, b, c).$$

6. Fonction de forces. — Nous supposerons dans tout ce qui suit que X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une même fonction U par rapport à x, y, z. On aura alors :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU.$$

En multipliant par dx, dy, dz les équations (2) et remar-

quant que l'on a, en vertu des équations (1) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t}\right) dy \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t}\right) dz = dU - \frac{dp}{\rho}, \end{aligned}$$

ce qui, en appelant V la vitesse $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, peut s'écrire, d'après une transformation due à Lagrange :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)(v\,dx - u\,dy) \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)(w\,dy - v\,dz) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)(u\,dz - w\,dx) \\ &= dU - \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} d(V^2). \end{aligned} \right.$$

C'est en se fondant sur cette forme d'équation que Lagrange a approfondi le cas important où il existe un potentiel de vitesse.

7. Potentiel de vitesse. — On dit que la vitesse dérive d'un potentiel lorsque u, v, w sont les dérivées par rapport au temps d'une fonction de x, y, z, t.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

on a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

et l'équation précédente se réduit simplement à celle-ci :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x} dx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial y} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial z} dz = d\mathrm{U} - \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{2} d(\mathrm{V}^2),$$

c'est à dire, en faisant rentrer dans φ une fonction arbitraire du temps :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathrm{U} - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\mathrm{V}^2}{2};$$

ce qui, eu égard à l'équation (6), nous donne :

$$\text{(8)} \qquad \int \frac{dp}{\mathrm{F}(p)} = \mathrm{U} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\mathrm{V}^2}{2},$$

d'ailleurs on a :

$$\mathrm{V}^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2.$$

L'équation de continuité nous donne aussi :

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Par l'intermédiaire de l'équation (6), l'équation (8) donne ρ en fonction de $\mathrm{U} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\mathrm{V}^2}{2}$, c'est à dire à l'aide des dérivées de φ et d'une fonction connue U. En transportant cette valeur de ρ dans l'équation (9), celle-ci sera simplement une équation différentielle en φ; et cette fonction se trouvera ainsi déterminée.

Si, par exemple, le fluide est caractérisé par la relation

$$\rho = \mathrm{F}(p) = \frac{1}{k} p,$$

on a :

$$k\int \frac{dp}{p} = k \log p,$$

et l'équation (8) devient, par l'introduction immédiate de ρ :

$$k \log \rho = \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2\right).$$

Du reste, l'équation (9) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \log \rho}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \log \rho}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \log \rho}{\partial z} + \frac{\partial \log \rho}{\partial t} = 0,$$

et la substitution de la valeur précédemment trouvée pour log ρ n'offre pas de difficultés.

Malheureusement, l'équation que l'on obtient ainsi, outre les difficultés de son intégration, ne saurait être appliquée aux gaz, dans lesquels les phénomènes thermiques jouent un rôle éminemment prépondérant.

Mais dans le cas de fluides incompressibles et homogènes, ρ étant constant, l'équation (9) se réduit tout de suite à la forme bien connue :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

qui servira à trouver φ; on aura ensuite :

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2.$$

Les conditions d'existence d'un potentiel de vitesse ne pouvaient manquer d'attirer l'attention des géomètres. Lagrange a démontré, en s'appuyant sur l'équation (7), que si à une époque du mouvement il existait un potentiel de vitesse, la même propriété ne cessait pas de subsister pendant tout le cours du mouvement.

D'ailleurs, si l'on a pu dans quelques cas très particuliers intégrer complètement les équations de l'hydrodynamique, le problème général n'a guère avancé depuis Lagrange, et nous ne nous occuperons plus que d'un cas particulièrement remarquable, celui du régime permanent.

Du régime permanent.

8. Filets. — Le *régime* est dit *permanent* lorsque les cinq fonctions u, v, w, p, ρ ne dépendent pas du temps explicitement; en sorte que tout point du fluide qui passe en un point (x, y, z) de l'espace y acquiert une vitesse qui ne dépend aucunement, ni en grandeur, ni en direction, de l'époque de son passage.

Par tout point M (x, y, z) il passe donc une droite MT dirigée suivant la vitesse que doit posséder toute molécule du fluide, si elle vient passer au point M.

Si l'on se déplace en M' suivant MT, au point M' répond une seconde droite M'T' sur laquelle on pourra se déplacer encore infiniment peu en M'', et ainsi de suite.

Le point M se trouve alors déplacé sur une courbe C, telle que la tangente en chaque point M de cette courbe ait précisément la direction de la vitesse qui correspond au point M. On voit tout de suite qu'un point du fluide qui passe à un moment quelconque au point M doit continuer à se mouvoir sur cette courbe C, puisque la direction de sa vitesse est constamment tangente à cette courbe. D'ailleurs, puisque par le point M il passe toujours un point du fluide, on en conclut qu'à un instant quelconque la courbe C se trouve occupée tout entière par une succession de points du fluide qui la parcourent en se remplaçant les uns les autres, et acquérant chacun une même vitesse lors de leur passage par un même point de cette courbe. Cette courbe C représente ce que l'on appelle un *filet* du fluide.

Supposons u, v, w connus en fonction de x, y, z; les équations des filets s'obtiendront en exprimant que le déplacement MM′ s'effectue suivant la direction qui correspond au point M; ce qui donne :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w};$$

comme on devait s'y attendre d'après les équations (1), qui déterminent les trajectoires des points du fluide.

9. Un cas intéressant, c'est celui où la vitesse dérive d'un potentiel, c'est à dire où u, v, w sont les dérivées partielles d'une même fonction φ de x, y, z :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les surfaces $\varphi =$ const. sont les *surfaces de niveau* relatives à ce potentiel; et les équations précédentes font voir ainsi que : *Lorsque la vitesse dérive d'un potentiel, les filets sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau relatives à ce potentiel.*

10. Surfaces de nulle résistance. — Dans une thèse intéressante sur le mouvement permanent des fluides, M. de Salvert a introduit une série de surfaces remarquables que l'on peut définir de plusieurs manières, et auxquelles il a donné le nom de *surfaces de nulle résistance.* Ces surfaces sont définies par la condition d'être le lieu d'une série de filets, ou, ce qui revient au même, d'être telles que le plan tangent en chaque point contient la direction de la vitesse qui correspond à ce point.

Soit $\theta(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface de nulle résistance, la dernière condition nous donne l'équation linéaire aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire θ,

car si le plan tangent en un point doit contenir la vitesse qui lui est relative, il faut avoir :

$$u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=0. \tag{5}$$

Eu égard aux équations (1), l'équation (5) peut s'écrire $\frac{d\theta}{dt}=0$, et la recherche des surfaces de nulle résistance revient à celle des éléments qui, variant généralement d'un point à l'autre, restent cependant invariables pendant le mouvement, c'est à dire pour un déplacement effectué suivant un filet. Si l'on peut déterminer *à priori* deux de ces éléments α et β, indépendants entre eux, tous les autres seront des simples fonctions de ceux-là, d'après la théorie ordinaire des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Mais nous renvoyons à la thèse de M. de Salvert pour ce qui concerne ces développements.

11. Intégrale des forces vives. — Supposons qu'il existe une fonction des forces, la vitesse dérivant ou non d'un potentiel, et soit :

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Partons des 3 équations de l'hydrodynamique :

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z};$$

en multipliant par dx, dy, dz et ajoutant, il vient :

$$du\cdot\frac{dx}{dt}+dv\cdot\frac{dy}{dt}+dw\cdot\frac{dz}{dt}=dU-\frac{1}{\rho}dp.$$

Mais supposons le déplacement dx, dy, dz *effectué suivant un filet,* les équations (1) nous donnent, V représentant la vitesse :

$$\frac{1}{2} d\,(V^2) = u\,du + v\,dv + w\,dw = \frac{dx}{dt}\,du + \frac{dy}{dt}\,dv + \frac{dz}{dt}\,dw,$$

d'où :

$$\frac{1}{2} d\,(V^2) = dU - \frac{1}{\rho}\,dp.$$

Il ne faut pas confondre cette équation avec celle dont on a tiré l'équation (8). Cette dernière suppose qu'il existe un potentiel de vitesse, et s'étend à tout déplacement. Ici au contraire, nous ne nous restreignons pas au cas d'un potentiel, mais nos différentielles se rapportent à un déplacement effectué suivant un filet.

Supposons, comme plus haut, que l'on ait $\rho = F(p)$. Posons alors :

$$\int \frac{dp}{F\,(p)} = \varphi\,(p),$$

et nous aurons :

$$\frac{1}{2} d\,(V^2) = dU - \varphi'\,(p)\,dp,$$

d'où l'intégrale des forces vives :

$$V^2 - 2U + 2\varphi\,(p) = h = \text{const.}$$

Par exemple, si le fluide est un liquide homogène, ρ est constant, et l'on a :

$$V^2 - 2U + 2\frac{p}{\rho} = h = \text{const.}$$

S'il s'agit d'un gaz, nous avons dit que l'on prenait $\rho = ap$, et alors $\varphi(p) = \frac{1}{a} \log p$, d'où :

$$V^2 - 2U + \frac{2}{a} \log p = h = \text{const.}$$

12. Théorème de Bernoulli. — En appliquant cette équation aux liquides pesants, on a le théorème de Bernoulli.

Prenons $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$ (l'axe Oz étant supposé vertical); on a pour l'équation des forces vives :

$$V^2 + 2gz + 2\frac{p}{\rho} = h = \text{const.}$$

Au lieu de cette équation on peut prendre la suivante :

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = h = \text{const.},$$

dont l'interprétation est plus facile.

$\frac{V^2}{2g}$ est la *hauteur due à la vitesse* V; $\frac{p}{\rho g}$ est la colonne de liquide qui représente la pression p; enfin z est la distance du point considéré à un plan horizontal fixe. Si donc, à partir du point M considéré, on porte sur une verticale et vers le haut une longueur MN égale à la somme des hauteurs $\frac{V^2}{2g}$ et $\frac{p}{\rho g}$, et que l'on répète cette opération *en tous les points d'un même filet,* l'extrémité N de la longueur ainsi construite reste dans un plan horizontal; ce plan a reçu le nom de *plan de charge,* relatif à ce filet, et la somme $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$ s'appelle la *charge*. En hydrostatique la charge se compose du terme unique $\frac{p}{\rho g}$, ici la charge se trouve augmentée de la hauteur due à la vitesse, en sorte que l'effet du mouvement est de faire remonter le plan de charge.

13. Théorème de Torricelli. — Considérons un filet C, et deux points M_0, M de ce filet par lesquels nous lui mènerons deux plans normaux ω_0 et ω; dans le plan ω_0 décrivons une courbe infiniment petite γ_0 entourant le point M_0, et

envisageons les filets qui partent des points de cette courbe; leur ensemble constituera une sorte de tube infiniment petit qui découpera dans le plan ω une courbe γ infiniment petite entourant le point M, du moins je le suppose. On voit que la paroi de ce tube constituera une de ces surfaces de nulle résistance étudiées par M. de Salvert. Soient σ_0 et σ les aires des deux courbes γ_0 et γ; V_0 et V les vitesses aux points M_0 et M. La quantité de fluide qui pénètre dans le tube par l'aire σ_0 devant être égale à celle qui sort par l'aire σ, il faut avoir :

$$V_0 \sigma_0 = V \sigma.$$

Or, supposons qu'il s'agisse de fluides pesants, on aura d'après le théorème de Bernoulli :

$$V_0^2 + 2gz_0 + 2\frac{p_0}{\rho} = V^2 + 2gz + 2\frac{p}{\rho},$$

où z_0 et z, p_0 et p sont les cotes et les pressions qui se rapportent aux points M_0 et M. Donc :

$$V_0^2 - V^2 = 2\frac{p - p_0}{\rho} + 2g(z - z_0).$$

Mais $z - z_0$ c'est la différence de niveau ζ des points M_0 et M; si alors on peut faire en sorte que $p = p_0$, il vient :

$$V_0^2 - V^2 = 2g\zeta,$$

ou :

$$V_0^2 \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = 2g\zeta.$$

Ces conditions sont réalisées par un récipient maintenu à un niveau constant, et percé vers le bas d'une ouverture extrêmement petite par rapport à la section de la surface libre : les deux sections, celles de la surface libre et de l'ouverture, sont toutes deux en contact avec l'atmosphère, ce qui permet de faire $p = p_0$. Mais de plus, eu égard à

l'exiguité de l'ouverture par où s'effectue l'écoulement, le terme $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$ peut être négligé, et il reste pour la vitesse de l'écoulement :

$$V_0 = \sqrt{2g\zeta},$$

ce qui est le principe trouvé expérimentalement par Torricelli.

FIN.

NOTES

DE MR DARBOUX

NOTE XIV

SUR UN PROBLÈME RELATIF A LA THÉORIE DES FORCES CENTRALES.

Dans un article élégant inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 849, M. Bertrand s'est proposé de rechercher, parmi toutes les lois d'attraction émanant d'un centre fixe, celles pour lesquelles la trajectoire d'un point libre sera toujours fermée. La solution de cette question se ramène à un intéressant problème d'analyse qui a été complètement étudié par M. Bertrand. Nous nous proposons d'exposer ici, avec quelques modifications dans le calcul, la méthode suivie par cet illustre géomètre.

Soient r et θ les coordonnées polaires du point attiré, $\mathrm{R} = f(r)$ la force; l'équation de la trajectoire sera, comme on sait :

$$(1) \qquad d\theta = \pm \frac{c\, d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2\int \mathrm{R}\, dr + h}},$$

c désignant la constante des aires et h la constante des forces vives. Si donc on pose :

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = z, \quad 2\int \mathrm{R}\, dr = \varphi(z),$$

et si l'on désigne par A et B deux constantes nouvelles dont les

valeurs soient

$$A = \frac{1}{c^2}, \quad B = \frac{h}{c^2},$$

l'équation de la trajectoire prendra la forme :

$$(3) \qquad d\theta = \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + A\varphi(z) + B}}.$$

Quelle que soit la loi de la force, on sait que la trajectoire jouit de la propriété de se composer de parties égales disposées régulièrement autour du centre attractif. Soient O ce centre et M un point de la trajectoire correspondant, par exemple, à une valeur minimum du rayon vecteur OM. Quand le mobile s'éloignera du point M, le rayon vecteur croîtra. Supposons que ce rayon vecteur prenne sa valeur maximum quand le mobile sera arrivé au point N de la trajectoire. Les deux rayons vecteurs OM, ON seront des axes de symétrie de la trajectoire. Par conséquent, on engendrera le reste de cette courbe en prenant la symétrique MM' de la partie déjà connue MN par rapport au rayon ON; puis en faisant tourner l'ensemble MNM' des deux arcs ainsi obtenus, de l'angle MOM' autour du point O, autant de fois que cela sera nécessaire. Il suit évidemment de là que la valeur du rayon vecteur redevient constamment la même, toutes les fois que ce rayon vecteur passe par un maximum (ou par un minimum), et que la condition nécessaire pour que la trajectoire soit fermée est que l'angle compris entre un rayon vecteur maximum et le rayon vecteur minimum qui le suit soit dans un rapport commensurable avec π.

Reportons-nous à l'équation (2); les maxima et les minima de r ou, ce qui est la même chose, de z sont donnés par l'équation :

$$-z^2 + A\varphi(z) + B = 0.$$

Si donc α et β désignent les valeurs maxima et minima de z, on devra avoir les deux équations :

$$-\alpha^2 + A\varphi(\alpha) + B = 0,$$
$$-\beta^2 + A\varphi(\beta) + B = 0,$$

qui permettent de déterminer A et B en fonction de α et de β.

Portons les valeurs de A et de B ainsi obtenues dans l'équation (3), nous aurons :

$$(4)\qquad d\theta = \frac{dz\sqrt{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}}{\sqrt{\Delta}},$$

Δ désignant, pour abréger, le déterminant :

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} z^2 & \varphi(z) & 1 \\ \alpha^2 & \varphi(\alpha) & 1 \\ \beta^2 & \varphi(\beta) & 1 \end{vmatrix},$$

et l'angle Θ compris entre le rayon maximum et le rayon minimum qui le suit sera évidemment

$$(6)\qquad \Theta = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}\;dz}{\sqrt{\Delta}},$$

Θ ne dépend que de la forme de la fonction φ et des constantes α et β.

La condition du problème est que l'on ait :

$$(7)\qquad \Theta = \mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable, et cela pour toutes les valeurs de α et de β.

Il ne peut en être ainsi que si l'angle Θ demeure constant lorsque α et β varient; car si cet angle était variable, son rapport à π passerait évidemment par une infinité de valeurs incommensurables. Nous sommes ainsi ramenés au problème d'analyse suivant :

Déterminer, s'il est possible, la fonction φ de telle manière que l'on ait, pour toutes les valeurs de α et de β :

$$(8)\qquad \Theta = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}\;dz}{\sqrt{\Delta}} = \mu\pi;$$

μ *désignant un nombre commensurable constant.*

Pour résoudre ce problème, posons :

$$\alpha = a - h,\qquad z = a + ht,\qquad \beta = a + h,$$

et supposons h assez petit pour que l'on puisse développer la fonction φ suivant les puissances de h. On aura :

$$\varphi(\alpha) = \varphi - h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' - \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{\text{IV}} - \ldots,$$

$$\varphi(\beta) = \varphi + h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{\text{IV}} + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \varphi + ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{\text{IV}} + \ldots;$$

$\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ désignant, pour abréger, $\varphi(a), \varphi'(a), \varphi''(a), \ldots$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'intégrale (8) et dans la valeur de Δ, on trouvera :

$$\Delta = 2h^2(1-t^2)\left[\varphi' - a\varphi'' - \frac{1}{3}a\varphi'''ht + \frac{h^2}{12}\left\{2\varphi''' - a\varphi^{\text{IV}}(1+t^2)\right\} + \ldots\right],$$

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = 2h\left[\varphi' + \frac{h^2}{6}\varphi''' + \ldots\right],$$

et par conséquent :

$$(9)\quad \Theta = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\varphi' + \dfrac{h^2\varphi'''}{6} + \ldots}\; dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{\varphi' - a\varphi'' - \dfrac{a\varphi'''}{3}ht + \dfrac{h^2}{12}\{2\varphi''' - a\varphi^{\text{IV}}(1+t^2)\} + \ldots}}$$

Pour $h = 0$, cette expression se réduit à la suivante :

$$(10)\qquad \Theta_0 = \sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}}.$$

Pour qu'elle soit constante, il faut donc que le rapport

$$\frac{a\varphi''}{\varphi'}$$

soit indépendant de a, ce qui donne :

$$\varphi(z) = Cz^m + C_1.$$

C, m et C_1 étant trois constantes arbitraires; φ désignant la fonction

des forces on peut même supprimer C_1 et écrire :

(11) $$\varphi(z) = Cz^m.$$

L'expression approchée de Θ devient alors :

(12) $$\Theta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2-m}},$$

et l'on voit que l'exposant m devra être choisi de telle manière que $2 - m$ soit le carré d'un nombre commensurable $\frac{1}{\mu}$.

Avant de poursuivre la solution du problème proposé, nous allons présenter quelques remarques sur le résultat précédent qui est dû à Newton (*Principes*, livre I, proposition XLV). Newton considère un corps soumis à l'action d'une force centrale, décrivant une orbite peu différente d'un cercle, et il détermine l'angle que nous avons désigné par Θ_0. Cette détermination avait pour le but qu'il se proposait la plus haute importance; car si l'on admet que la loi de la force soit celle de la nature, la valeur de Θ_0 donnée par la formule (10) ou la formule (12) sera π; les aphélies seront sensiblement immobiles et à 180° des périhélies; mais, pour peu que la loi de la force eût différé de celle que nous devons à Newton, les périhélies auraient eu un mouvement direct ou rétrograde dont l'effet serait devenu nécessairement sensible après un nombre suffisant de révolutions. Newton obtient des résultats équivalents aux formules (10) et (12) par une méthode qui contient le premier germe de la théorie des mouvements relatifs.

Revenons au problème que nous avons en vue et qui n'est pas encore complètement résolu. Si nous portons dans la formule (9) l'expression de φ et si nous posons, pour abréger,

$$k = \frac{h}{a},$$

nous trouverons :

$$\Theta = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1 + \frac{k^2(m-1)(m-2)}{6} + \dots}\; dt}{\sqrt{2-m}\sqrt{1-t^2}\sqrt{1 - \frac{k(1-m)t}{3} + \frac{k^2}{12}(1-m)[2-(m-3)(1+t^2)] + \dots}}$$

Cette expression dépend en général de k, et par conséquent toutes les valeurs de m, qui conviennent quand l'orbite est très peu différente d'un cercle, cessent d'être acceptables lorsqu'on suppose qu'il existe une différence finie entre le maximum et le minimum du rayon vecteur. Mais si l'on développe suivant les puissances de k, en employant les formules suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$

on trouvera :

$$\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2-m}} \left\{ 1 + \frac{(m-1)(m+2)}{24} k^2 + \dots \right\}.$$

Pour que cette valeur soit indépendante de k^2, il faut évidemment que l'on ait :

$$(m-1)(m+2) = 0.$$

L'hypothèse $m = 1$ donne pour la fonction des forces :

$$\varphi(z) = \int \mathrm{R}\,dr = \mathrm{C}z = \frac{\mathrm{C}}{r}.$$

C'est la loi de Newton, pour laquelle on a :

$$\theta = \pi.$$

L'hypothèse $m = -2$ donne :

$$\int \mathrm{R}\,dr = \frac{\mathrm{C}}{z^2} = \mathrm{C}r^2, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

L'attraction est alors proportionnelle à la distance. On sait d'ailleurs que ces deux lois donnent des solutions de la question proposée.

Ainsi se trouve établi le théorème de M. Bertrand :

Si l'on considère le mouvement d'un mobile attiré par un centre fixe dont l'action est une fonction de la distance, la loi de Newton et celle pour laquelle l'attraction est proportionnelle à la distance sont les seules pour lesquelles la trajectoire du mobile soit constamment fermée.

NOTE XV

SUR UNE QUESTION RELATIVE AU MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.

Après avoir considéré dans la Note précédente le mouvement d'un point libre soumis à l'action d'un centre fixe, nous allons étudier ici une question analogue, relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution. Nous admettrons que le point est soumis à la seule action de forces émanant des différents points de l'axe ou bien de forces parallèles à l'axe et fonctions de la distance du point sur lequel elles agissent à un plan fixe parallèle à l'axe. Ces hypothèses se résument en une seule : il y a une fonction des forces qui conserve la même valeur en tous les points d'un parallèle de la surface. Nous allons rechercher s'il est possible de déterminer la nature de la fonction et la forme de la surface de telle manière que les trajectoires du mobile soient des courbes constamment fermées.

I

Prenons pour axe des z l'axe de la surface. Désignons par r la distance d'un point quelconque à cet axe, et soit

$$z = \varphi(r)$$

l'équation de la surface. La fonction des forces est, par hypothèse, une fonction de r que je désignerai par

$$f(r).$$

Si ω est l'angle que fait le plan méridien contenant le mobile avec un méridien fixe pris pour origine, l'équation différentielle de la

trajectoire sera, comme on sait,

$$(1) \qquad (1+\varphi'^2)\frac{dr^2}{d\omega^2} = C^2 r^4 f(r) + h r^4 - r^2;$$

C^2 et h désignant deux constantes arbitraires.

Si la courbe est fermée, les valeurs de r seront comprises entre deux limites α β, et la trajectoire sera comprise tout entière entre les deux parallèles de rayon α et β. Pour ces deux parallèles extrêmes, $\frac{dr}{d\omega}$ doit s'annuler, r étant maximum ou minimum. On a donc :

$$C^2 f(\alpha) + h - \frac{1}{\alpha^2} = 0,$$

$$C^2 f(\beta) + h - \frac{1}{\beta^2} = 0.$$

Ces équations permettent d'exprimer h et C^2 en fonction de α et de β. Si l'on pose :

$$(2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} f(r) & 1 & \frac{1}{r^2} \\ f(\alpha) & 1 & \frac{1}{\alpha^2} \\ f(\beta) & 1 & \frac{1}{\beta^2} \end{vmatrix},$$

l'équation de la trajectoire devient :

$$(1+\varphi'^2)\frac{dr^2}{r^4\, d\omega^2} = \frac{\Delta}{f(\beta) - f(\alpha)},$$

et l'on a par conséquent :

$$\omega = \int \frac{dr\sqrt{1+\varphi'^2}\sqrt{f(\beta)-f(\alpha)}}{r^2\sqrt{\Delta}}.$$

En employant le mode de raisonnement de la Note précédente, on reconnaît qu'il est nécessaire et suffisant, pour que la courbe soit fermée, que l'on ait :

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}\sqrt{f(\beta)-f(\alpha)}}{r^2\sqrt{\Delta}} = \mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant. Ainsi il y a à déterminer les deux fonctions arbitraires $f(r)$, $\varphi(r)$ de manière à satisfaire à l'égalité précédente. Dans le problème traité par M. Bertrand, il y avait au contraire une seule fonction inconnue.

Je commencerai par réserver le cas où l'on suppose la fonction $f(r)$ constante, ce qui revient à chercher les surfaces de révolution pour lesquelles les lignes géodésiques sont fermées. Alors on pourra effectuer le changement de notations suivant.

Posons :

$$(4)\ f(r)=x,\quad f(\alpha)=x_0,\quad f(\beta)=x_1,\quad \frac{1+\varphi'^2}{r^4 f'^2}=\mathrm{F}(x),\quad \frac{1}{r^2}=\varpi(x).$$

L'équation (3) se transformera dans la suivante :

$$(5)\qquad \Omega=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{\mathrm{F}(x)}\sqrt{x_1-x_0}\,dx}{\sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ x_0 & 1 & \varpi(x_0) \\ x_1 & 1 & \varpi(x_1)\end{vmatrix}}}=\mu\pi.$$

Supposons x_0 et x_1 peu différents et posons :

$$x_0=a-\varepsilon,\qquad x_1=a+\varepsilon,$$
$$x=a+\varepsilon u.$$

On aura, en développant suivant les puissances de ε :

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & 1 & \varpi(x) \\ x_0 & 1 & \varpi(x_0) \\ x_1 & 1 & \varpi(x_1)\end{vmatrix}$$
$$=\varepsilon^3(1-u^2)\left\{\varpi'+\frac{\varpi'''}{3}\varepsilon u+\frac{\varpi^{\mathrm{IV}}}{12}\varepsilon^2(1+u^2)+\dots\right\};$$

ϖ', ϖ''', ϖ^{IV} désignant les valeurs de ces fonctions pour $x=a$. On déduit de l'équation précédente :

$$(6)\quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}=\frac{1}{\sqrt{\varpi'(1-u^2)\varepsilon^3}}\left\{1-\frac{\varpi'''}{6\varpi'}\varepsilon u-\frac{\varepsilon^2}{24}\frac{\varpi^{\mathrm{IV}}}{\varpi'}(1+u^2)\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{24}\left(\frac{\varpi'''}{\varpi'}\right)^2u^2+\dots\right\},$$

en négligeant seulement dans la parenthèse les termes en ε^2. On a de même :

$$(7)\qquad \sqrt{F(x)} = \sqrt{F}\left\{1 + \frac{F'}{2F}\varepsilon u + \left(\frac{F''}{4F} - \frac{F'^2}{8F^2}\right)\varepsilon^2 u^2 + \ldots\right\}.$$

Ces formules permettent de développer Ω suivant les puissances de ε. On obtient d'abord sans aucune difficulté le premier terme de Ω.

$$\Omega = \sqrt{\frac{2F(a)}{\varpi'(a)}}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi\sqrt{\frac{2F(a)}{\varpi'(a)}}.$$

Cette valeur de Ω devant être égale à $\mu\pi$, on aura :

$$\sqrt{\frac{2F(a)}{\varpi'(a)}} = \mu,$$

ou, en remplaçant a par x :

$$(8)\qquad F(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi'(x).$$

Tout se réduit donc à la détermination de la seule fonction $\varpi(x)$. Pour l'obtenir nous allons compléter le développement de Ω. On aura, en tenant compte des formules (6), (7) et (8) :

$$\Omega = \mu\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left\{1 + \frac{\varpi''}{3\varpi'}\varepsilon u - \frac{\varpi''^2}{6\varpi'^2}\varepsilon^2 u^2 + \frac{\varepsilon^2\varpi^{\text{IV}}}{\varpi'}\frac{5u^2-1}{24} + \ldots\right\}.$$

En effectuant les quadratures, on trouve :

$$\Omega = \mu\pi + \pi\varepsilon^2\left(\frac{\varpi^{\text{IV}}}{16\,\varpi'} - \frac{\varpi''^2}{12\,\varpi'^2}\right) + \ldots,$$

les termes négligés contenant tous ε^4 en facteur. Ω devant être égal à $\mu\pi$, il faut que le coefficient de toutes les puissances de ε, et en particulier celui de ε^2, soient nuls, ce qui donne l'équation :

$$(9)\qquad 3\varpi'\varpi^{\text{IV}} - 4\varpi''^2 = 0,$$

qui fera connaître la fonction $\varpi(x)$.

Cette équation différentielle admet deux solutions d'espèce différente. La première s'obtient en supposant $\varpi''(x)$ constante. On a ainsi :

$$\varpi(x) = Ax^2 + Bx + C; \tag{10}$$

A, B, C désignant trois constantes.

Toutes les autres solutions sont comprises dans la formule :

$$\varpi(x) = \frac{A}{x - K} + Bx + C, \tag{11}$$

où A, B, C, K désignent quatre constantes.

Il est aisé de voir d'ailleurs que ces formes différentes de la fonction $\varpi(x)$ sont toutes acceptables. Car si l'on remplace dans l'équation (5) $F(x)$ par sa valeur :

$$F(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi(x), \tag{12}$$

et si l'on adopte l'une quelconque des valeurs de $\varpi(x)$ données par les formules (10) ou (11), on trouve pour toutes les valeurs de x_0, x_1 :

$$\Omega = \mu\pi.$$

Il nous reste à discuter les solutions du problème que nous venons d'obtenir, à reconnaître la nature des surfaces qui leur correspondent ainsi que celle des forces qui agissent dans chaque cas sur le mobile. Rappelons d'abord les notations adoptées.

Nous avons posé :

$$f(r) = x; \tag{13}$$

x est donc la fonction des forces et l'on pourra sans inconvénient lui ajouter ou lui retrancher une constante.

Nous avons d'ailleurs :

$$\frac{1}{r^2} = \varpi(x), \tag{14}$$

et en résolvant cette équation par rapport à x, nous aurons la fonction des forces exprimée au moyen de r. Enfin, d'après la définition de $F(x)$, nous pouvons écrire :

$$\frac{1 + \varphi'^2}{r^4 f'^2(r)} = F(x) = \frac{\mu^2}{2}\varpi'(x),$$

ou encore :

$$(15) \qquad 1 + \varphi'^2 = \frac{2\mu^2 \varpi(x) \varpi''(x)}{\varpi'^2(x)},$$

$$(16) \qquad dz^2 = \frac{2\mu^2 \varpi(x) \varpi''(x) - \varpi'^2(x)}{4 \varpi^3(x)} dx^2.$$

L'équation (16) fera connaître, par une quadrature, la coordonnée z en fonction de x.

L'élément linéaire de la surface de révolution qui est en général donné par la formule

$$ds^2 = (1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\omega^2$$

aura ici pour expression :

$$(17) \qquad ds^2 = \frac{\mu^2}{2} \frac{\varpi''(x)}{\varpi^2(x)} dx^2 + \frac{d\omega^2}{\varpi(x)}.$$

Nous avons établi cette dernière formule pour en déduire une conséquence intéressante.

Les deux valeurs de $\varpi(x)$ que nous avons trouvées, jouissent de la propriété de pouvoir être multipliées par une constante quelconque sans cesser de convenir au problème. Après avoir trouvé une solution correspondante à des valeurs données de μ et de $\varpi(x)$, considérons celle qui correspond aux valeurs $\alpha\mu$ et $\alpha^2\varpi(x)$, α désignant une constante qui sera nécessairement commensurable. L'élément linéaire de la surface correspondante à cette nouvelle solution sera donné, d'après la formule (17), par la formule

$$(18) \qquad ds^2 = \frac{\mu^2}{2} \frac{\varpi''(x)}{\varpi^2(x)} dx^2 + \frac{d\omega^2}{\alpha^2 \varpi(x)},$$

et on aura :

$$\frac{1}{r^2} = \alpha^2 \varpi(x).$$

Si donc on fait correspondre à un point (r, ω) de la première surface le point (r_1, ω_1) de la seconde, défini par les équations :

$$(19) \qquad r_1 = \frac{r}{\alpha}, \quad \omega_1 = \alpha\omega,$$

les arcs de deux courbes correspondantes quelconques tracées sur les

deux surfaces seront égaux; en d'autres termes les deux surfaces seront *applicables l'une sur l'autre*.

Ce résultat pouvait se prévoir *à priori;* car on sait par les formules de Lagrange que les équations du mouvement d'un point sur une surface quelconque demeurent les mêmes quand on déforme la surface en conservant à la fonction des forces la même expression en fonction des coordonnées curvilignes du point de la surface. Or étant donnée une surface de révolution, on peut toujours trouver une autre surface de révolution qui sera applicable sur cette surface, les coordonnées r et ω de deux points correspondants sur les deux surfaces étant liées par les formules (19). Si Ω et Ω_1 désignent les valeurs de l'angle Ω que nous avons calculé, relatives à ces deux surfaces, on aura :

$$\Omega_1 = \alpha\Omega.$$

Si donc la première surface donne une solution de notre problème, il en sera de même de la seconde pourvu que α soit commensurable.

Il suit de cette remarque que si, comme il est naturel, on considère comme ne fournissant qu'une seule solution toutes les surfaces qui sont applicables les unes sur les autres, on pourra, dans chaque cas particulier, donner à μ telle valeur que l'on voudra.

II

Appliquons d'abord nos formules à la première solution, celle pour laquelle on a :

$$\varpi(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

et par conséquent :

$$F(x) = \mu^2 A.$$

Comme $F(x)$ ne peut être nulle, A sera nécessairement différent de zéro.

En utilisant la remarque déjà faite d'après laquelle on peut ajouter à x une constante quelconque, nous pourrons faire disparaître le terme en x; et en changeant les notations, nous écrirons :

$$\varpi(x) = \frac{x^2 + C}{A} = \frac{1}{r^2},$$

ce qui donne :

$$(20) \qquad x^2 = \frac{A}{r^2} - C.$$

De l'équation (15) on tire :

$$1 + \varphi'^2 = \frac{A\mu^2}{A - Cr^2}.$$

Commençons par supposer $\mu = 1$, nous aurons :

$$\varphi' = r\sqrt{\frac{C}{A - Cr^2}},$$

ou, en intégrant,

$$\varphi^2 + r^2 = \frac{A}{C},$$

c'est à dire

$$z^2 + r^2 = \frac{A}{C}.$$

La surface est donc une sphère.

Quant à la force, on peut en donner différentes expressions [1]. Voici la plus élégante. En vertu de l'équation de la surface, la fonction des forces peut s'écrire :

$$x = \sqrt{C}\,\frac{z}{r},$$

et en différentiant cette expression, on obtiendra les deux composantes de la force : l'une, R, dirigée suivant le prolongement du rayon du

---

[1] On sait en effet que, dans le mouvement d'un point sur une surface, la loi du mouvement ne dépend que de la composante tangentielle de la force, la composante normale n'intervenant que dans le calcul de la pression du point sur la surface. Dans le problème qui nous occupe, on pourra donc supposer à la force telle direction que l'on voudra, pourvu qu'elle soit normale au rayon du parallèle. Si par exemple la fonction des forces est exprimée au moyen du rayon vecteur par la formule $f(r)$, la dérivée $f'(r)$ donnera la grandeur de la force supposée dirigée suivant le prolongement du rayon du parallèle Mais on peut, au moyen de l'équation de la surface, exprimer la fonction des forces au moyen de z par la formule $\lambda(z)$; et alors la dérivée $\lambda'(z)$ définira la force, qui sera supposée dans ce cas parallèle à l'axe de la surface. Si l'on exprime de même la fonction des forces au moyen de $\frac{z}{r}$ par la formule $\theta\left(\frac{z}{r}\right)$, les deux composantes

$$Z = \frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad R = \frac{\partial\theta}{\partial r}$$

définiront une force toujours normale au parallèle, mais dirigée cette fois dans le plan tangent à la surface.

parallèle, l'autre, Z, parallèle à l'axe des z. On trouve ainsi :

$$R = -\sqrt{C}\,\frac{z}{r^2}, \quad Z = \sqrt{C}\,\frac{1}{r}, \quad \sqrt{Z^2 + R^2} = \frac{\sqrt{C}}{r^2}.$$

Ces expressions nous montrent : 1° que la force est tangente au méridien ; 2° qu'elle est en raison inverse du carré de r, c'est à dire du carré du sinus de l'arc de cercle compris entre le point attiré et le pôle. L'analogie avec la loi de Newton est évidente.

On sait en effet qu'avec cette nature de forces la trajectoire sera une conique sphérique dont le pôle sera un des foyers (1).

On peut ramener, nous l'avons vu, au cas précédent tous ceux pour lesquels μ ne sera pas égal à l'unité ; car ils donneront des surfaces applicables sur la sphère. Mais il nous reste à traiter le cas où $C = 0$, qui est exclu par l'analyse précédente.

On a alors :

$$x = \frac{a}{r}, \quad 1 + \varphi'^2 = \mu^2.$$

Supposons d'abord $\mu = 1$, on aura :

$$\varphi' = 0, \quad z = \text{const.}$$

C'est le cas où le mouvement a lieu dans un plan et où la force, dirigée vers un point fixe, est en raison inverse du carré de la distance à ce point fixe.

Si μ était quelconque, on aurait :

$$z = \sqrt{\mu^2 - 1}\, r.$$

Cette équation convient à un cône de révolution qui est, comme il fallait s'y attendre, applicable sur le plan ; la force est une attraction dirigée vers le sommet du cône et en raison inverse du carré de la distance.

III

Examinons maintenant la seconde hypothèse, celle pour laquelle on a

$$\varpi(x) = \frac{A}{x - K} + Bx + C,$$

(1) PAUL SERRET. — *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 204

expression qu'on peut toujours ramener à la forme

$$\varpi(x) = \frac{A}{x} + Bx + C,$$

en changeant x en $x + K$. On aura ici :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{A}{x} + Bx + C, \tag{21}$$

et

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{4\mu^2 A (A + Bx^2 + Cx) - (A - Bx^2)^2}{4x (A + Bx^2 + Cx)^2}. \tag{22}$$

Il faudra effectuer la quadrature qui donne z, et l'on aura ainsi les expressions de z et de r en fonction de x. Pour obtenir la fonction des forces, on exprimera x en fonction de r en résolvant l'équation (21). Les résultats sont, on le voit, assez compliqués.

Traitons d'abord le cas où l'on a

$$B = 0,$$

et prenons $2\mu = 1$. Nous pouvons, d'après la remarque faite plus haut, nous borner à considérer cette valeur particulière de μ. On a alors :

$$z = \frac{1}{\sqrt{C}\sqrt{1 + \frac{C}{A}x}}, \quad r^2 = \frac{x}{A + Cx},$$

et par conséquent :

$$z^2 + r^2 = \frac{1}{C}.$$

Ainsi la surface correspondante à ces hypothèses est encore une sphère. La fonction des forces peut s'exprimer, en fonction de r et de z, par la formule homogène :

$$x = \frac{A}{C}\frac{r^2}{z^2}.$$

Sous cette forme elle donne naissance aux deux composantes :

$$R = \frac{2A}{C}\frac{r}{z^2}, \quad Z = -\frac{2A}{C}\frac{r^2}{z^3}.$$

La résultante de ces deux forces est encore dirigée suivant la tangente au méridien; sa grandeur est donnée par la formule :

$$\sqrt{R^2 + Z^2} = \frac{2A}{C\sqrt{C}} \frac{r}{z^3} = \frac{2A}{C} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta};$$

θ désignant la distance du mobile au pôle.

Dans cette loi de la force, on obtient en effet comme trajectoire une conique sphérique ayant le pôle pour centre (1).

Si B et C sont nuls en même temps et si l'on prend encore $2\mu = 1$, on trouvera :

$$dz = 0, \quad z = \text{const.}$$

La surface se réduit à un plan et la fonction des forces est alors

$$x = Ar^2,$$

c'est le cas où il y a une attraction proportionnelle à la distance.

Si μ était quelconque, on obtiendrait un cône de révolution ; la force serait une attraction émanant du sommet et proportionnelle à la distance.

Je laisserai de côté la discussion, nécessairement plus compliquée, du cas où A, B, C sont quelconques.

IV

Dans ce qui précède, nous avons pris d'abord le rayon r du parallèle comme une variable indépendante. Mais il n'arrive pas toujours que, sur une surface de révolution, cette variable puisse prendre toutes les valeurs possibles. Par exemple, dans la sphère, le rayon du parallèle doit être inférieur à celui de la sphère ; par conséquent, si la trajectoire du mobile est située dans les deux hémisphères, le rayon r du parallèle pourra croître d'une limite inférieure a à R, R désignant le rayon de

(1) Voir Paul Serret, ouvrage cité, p. 205.

la sphère, puis décroître de R à une autre limite. Or les intégrations que nous avons faites pour obtenir Ω supposent que r soit réellement indépendante et ne s'appliquent pas à cette hypothèse. La méthode que nous avons suivie est donc sujette à une objection qu'il est d'ailleurs facile de lever, au moins dans un cas très étendu.

En effet si la trajectoire est toujours fermée, comme nous le supposons, on pourra déterminer les constantes C et h qui figurent dans l'équation (1) de telle manière que $\frac{dr}{d\omega}$ s'annule pour deux valeurs α et β aussi rapprochées qu'on le voudra, pourvu toutefois que la fonction des forces satisfasse à une condition qui est évidente *à priori*. On aura en effet, d'après les formules données à l'article I :

$$C^2 = \frac{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{f(\alpha) - f(\beta)}.$$

Pour que la valeur de C^2 soit positive, il est nécessaire que la fonction $f(r)$ décroisse quand r croît. C'est à dire que la force puisse se représenter par une attraction dirigée vers l'axe. Ainsi :

Toutes les fois que la force à laquelle le mobile est soumis pourra être considérée, dans une région de la surface, comme une attraction dirigée vers l'axe de la surface, on pourra faire en sorte que la trajectoire du mobile soit placée entre deux parallèles aussi rapprochés qu'on le voudra; et l'on pourra par conséquent choisir ces parallèles de telle manière qu'ils ne comprennent pas dans leur intervalle un parallèle de rayon maximum ou de rayon minimum.

Alors notre méthode deviendra applicable et elle nous fera connaître la loi de la force et la forme de la surface. Il y aura lieu cependant, dans chaque cas particulier, de faire une discussion relative aux trajectoires qui traverseraient un parallèle de rayon maximum ou minimum, ou qui rencontreraient les cercles-limites de la surface. Nous allons voir précisément que cet examen des parallèles de rayon maximum ou minimum joue un rôle prépondérant dans la discussion du cas particulier de notre problème que nous avons réservé, celui où l'on cherche les surfaces de révolution dont toutes les lignes géodésiques sont fermées. Nous allons maintenant étudier d'une manière

détaillée ce cas particulier auquel ne s'applique pas la méthode précédente (1).

Considérons une surface de révolution et une ligne géodésique quelconque tracée sur cette surface. L'équation différentielle de cette ligne s'obtient en remplaçant dans l'équation (1) $f(r)$ par 0, ce qui donne :

$$(1 + \varphi'^2) \frac{dr^2}{d\omega^2} = hr^4 - r^2. \tag{23}$$

Si i désigne l'angle que fait en un point quelconque la ligne géodésique avec le parallèle qui passe en ce point, l'équation différentielle précédente peut aussi s'écrire

$$r \cos i = a,$$

a désignant $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Partons du parallèle de rayon a; la ligne géodésique lui est tangente et elle se dirige du côté où le rayon du parallèle augmente. Si ce rayon croît toujours, la ligne géodésique s'éloignera indéfiniment en coupant les parallèles sous un angle qui s'approchera de plus en plus d'être droit. Si la surface n'avait pas de parallèle de rayon égal à a, on partirait d'un parallèle quelconque et l'on obtiendrait les mêmes conclusions.

Supposons au contraire qu'il y ait un parallèle maximum, de rayon R, que j'appellerai un équateur. Si nous prenons a un peu inférieur à R, il y aura deux parallèles de rayon a, voisins l'un de l'autre, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de l'équateur; la ligne géodésique définie par l'équation

$$r \cos i = a$$

sera comprise entre ces deux parallèles et par conséquent sera, dans tout son parcours, à distance finie. Je vais chercher la condition pour qu'une telle ligne soit toujours fermée.

(1) On voit que nous laissons entièrement de côté le cas où la fonction $f(r)$ serait constamment croissante, où la force serait une répulsion pour toutes les valeurs de r. Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer à cette hypothèse la méthode que nous allons développer relativement aux lignes géodésiques.

On déduit de l'équation (23), en remplaçant h par $\frac{1}{a^2}$ et intégrant :

$$\omega = \int_a^r \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}\quad dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}}.$$

L'équation de la surface est, comme on sait :

$$z = \psi(r).$$

Si nous désignons par ω_1 l'angle dont le plan méridien passant par le mobile aura tourné, quand on arrivera sur l'équateur, on aura évidemment :

$$\omega_1 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}\quad dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}}}.$$

Le mobile, après avoir décrit cette portion de la ligne géodésique que nous supposerons placée dans la région de la surface inférieure à l'équateur, passera dans la région supérieure ; et si l'équation de cette nouvelle région est :

$$z = \psi(r),$$

l'angle ω_2 dont le plan méridien aura tourné quand le point décrivant aura passé de l'équateur au parallèle supérieur de rayon a, sera donné de même par la formule :

$$\omega_2 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\psi'^2}\quad dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}}.$$

L'angle total dont le plan méridien aura tourné dans le passage du parallèle inférieur de rayon a au parallèle supérieur de même rayon sera donc :

$$(24)\qquad \Omega = \omega_1 + \omega_2 = \int_a^R \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2}}{r\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}}\,dr,$$

et pour que la ligne géodésique soit fermée, il faudra que l'on ait :

$$\Omega = 2\,\mu\pi,$$

μ étant un nombre commensurable constant.

Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître que l'intégrale Ω est, aux notations près, celle qu'on rencontre dans la recherche des courbes tautochrones pour un point matériel pesant; et l'on est ainsi conduit à la solution du problème donnée par la formule :

$$(26)\qquad \sqrt{1+\varphi'^2} + \sqrt{1+\psi'^2} = \frac{4\,\mu R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

On voit que l'on pourra choisir arbitrairement l'une des fonctions φ ou ψ; l'autre sera déterminée par une quadrature.

Traitons le cas où la surface est symétrique par rapport à l'équateur. On aura alors :

$$\varphi'^2 = \psi'^2,$$

et l'équation précédente deviendra :

$$(27)\qquad \sqrt{1+\varphi'^2} = \frac{2\mu\, R}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Étudions d'abord le cas où l'on a :

$$2\mu = 1.$$

On trouvera en intégrant :

$$\varphi = \sqrt{R^2 - r^2}, \qquad z^2 + r^2 = R^2.$$

C'est l'équation de la sphère.

Nous avons vu d'ailleurs que lorsqu'on donne à μ des valeurs quelconques, on ne peut obtenir que des surfaces applicables sur celles qui correspondent à une valeur déterminée, particulière, de μ. En utilisant cette remarque, développée à l'article I, nous obtenons le théorème suivant :

Les seules surfaces de révolution ayant leurs lignes géodésiques fermées et admettant de plus un de leurs parallèles pour plan de symétrie sont la sphère

et certaines surfaces applicables sur la sphère assujetties à la condition suivante :

Dans deux surfaces de révolution applicables l'une sur l'autre, deux parallèles correspondants ont toujours leurs rayons dans un rapport constant; ici ce rapport constant devra de plus avoir une valeur commensurable.

On sait que, parmi les surfaces de révolution applicables sur la sphère, les unes ont un point conique sur l'axe, les autres ne rencontrent pas l'axe. Pour les premières, toutes les lignes géodésiques seront fermées. Pour les autres, qui peuvent être assimilées à une zone limitée par deux cercles de rebroussement, il faudra écarter les lignes géodésiques qui viennent frapper les cercles limites; toutes les autres seront fermées.

Parmi les surfaces de révolution dont les lignes géodésiques sont fermées, je signalerai les deux suivantes :

La première a son élément linéaire défini par la relation :

$$ds^2 = \left(\frac{2a}{\rho} - 1\right)(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2),$$

où θ désigne l'angle du méridien passant par le point de la surface avec un méridien-origine et où ρ est liée au rayon r du parallèle par la relation :

$$r^2 = \mu^2 \rho\,(2a - \rho),$$

μ étant un nombre commensurable quelconque.

La deuxième surface serait, avec les mêmes notations, définie par les relations :

$$\begin{cases} ds^2 = (a^2 - \rho^2)(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2), \\ r^2 = \mu^2 \rho^2 (a^2 - \rho^2). \end{cases}$$

NOTE XVI

SUR UNE EXTENSION DU THÉORÈME D'IVORY RELATIF A L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES.

Je me propose de faire connaître ici une extension de la méthode d'Ivory, d'où résulte un théorème nouveau, relatif à l'attraction des ellipsoïdes. J'ai déjà donné cette proposition dans une étude *sur les théorèmes d'Ivory et de Jacobi, relatifs aux surfaces homofocales du second degré* qui a paru dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de B rdeaux* (t. VIII, 1870, p. 253).

Considérons un ellipsoïde homogène (G) défini par l'équation :

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et cherchons l'action qu'il exerce sur un point matériel M de coordonnées α, β, γ, en supposant la loi de l'attraction représentée par la fonction $\varphi'(r)$. On a vu dans le texte que si l'on désigne par u_1 et u_2 les distances, au point M, des deux points de l'ellipsoïde qui se projettent sur le point de coordonnées y, z du plan des zy, on a, pour la composante A de l'attraction parallèle à Ox, l'expression

(2) $$A = \iint [\varphi(u_1) - \varphi(u_2)]\, dy\, dz.$$

Faisons correspondre à chaque point de l'ellipsoïde le point (ξ, η, ζ) de la sphère de rayon 1,

(3) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

défini par les formules :

$$(4)\qquad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c}.$$

L'équation (2) prendra la forme :

$$A = bc \iint [\varphi(u_1) - \varphi(u_2)]\, d\zeta\, d\eta,$$

et si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère, on reconnaîtra aisément que cette intégrale peut être mise sous la forme :

$$(5)\qquad A = bc \iint \varphi(u) \cos(N, x)\, d\sigma;$$

(N, x) désignant l'angle de la normale extérieure à la sphère avec la partie positive de Ox et l'intégrale étant étendue à toute la surface de la sphère. Nous nous dispenserons d'écrire les expressions analogues que l'on aurait pour les composantes B, C. La valeur de u en fonction des coordonnées ξ, η, ζ est donnée par la formule :

$$(6)\qquad u^2 = (a\xi - \alpha)^2 + (b\eta - \beta)^2 + (c\zeta - \gamma)^2.$$

Cela posé, considérons un autre ellipsoïde (G$'$) défini par l'équation :

$$(7)\qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - 1 = 0,$$

et un autre point M$'$ de coordonnées α', β', γ'. Cherchons l'action exercée par cet ellipsoïde sur le point M$'$ suivant une loi d'attraction représentée par la fonction $\psi'(r)$. La composante A$'$ analogue à A sera donnée par la formule :

$$(8)\qquad A' = b'c' \iint \psi(u') \cos(N, x)\, d\sigma,$$

analogue à la formule (5), et où l'on aura :

$$(9)\qquad u'^2 = (a'\xi - \alpha')^2 + (b'\eta - \beta')^2 + (c'\zeta - \gamma')^2.$$

Cela posé, s'il est possible de déterminer les constantes a', b', c', α', β', γ' et la forme de la fonction ψ de telle manière que l'on ait,

pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ se rapportant aux différents points de la sphère :

(10) $$\psi(u') = \varphi(u),$$

on en déduira :

$$A' = A\frac{b'c'}{bc}, \quad B' = B\frac{a'c'}{ac}, \quad C' = C\frac{a'b'}{ab},$$

et la recherche de l'attraction de l'ellipsoïde (G) avec la loi d'attraction $\varphi'(r)$ sera ramenée à celle de l'ellipsoïde (G') avec la loi différente $\psi'(r)$. Examinons par conséquent s'il est possible de vérifier l'équation (10) pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ qui satisfont à l'équation (3), c'est à dire qui sont les coordonnées d'un point de la sphère de rayon 1.

Si l'équation (10) a lieu identiquement, l'équation $u =$ const. entraînera la suivante :

$$u' = \text{const.},$$

et par conséquent les deux ellipsoïdes représentés par les équations :

$$u^2 = c^2, \quad u'^2 = c'^2,$$

où c' est une fonction convenablement choisie de c, devront se couper suivant une courbe située sur la sphère de rayon 1. Il faut comme on sait, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait :

$$u^2 - c^2 - h(u'^2 - c'^2) = \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1),$$

pour toutes les valeurs possibles de ξ, η, ζ, les constantes h et λ étant convenablement choisies. Si l'on remplace u^2, u'^2 par leurs valeurs et si l'on désigne, pour abréger, par $-k^2$ la constante $c^2 - hc'^2$, on aura l'équation :

$$\begin{aligned}(a\xi - \alpha)^2 + (b\eta - \beta)^2 + (c\zeta - \gamma)^2 \\ - h[(a'\xi - \alpha')^2 + (b'\eta - \beta')^2 + (c'\zeta - \gamma')^2] \\ = \lambda[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1] - k^2,\end{aligned}$$

qui devra être vérifiée identiquement. On reconnaîtra aisément qu'en remplaçant l'ellipsoïde (G') et le point M' par un système semblable, on peut réduire h à l'unité, positive ou négative. Supposons $h = 1$;

les équations d'identification dans cette hypothèse deviendront :

$$a^2 - a'^2 = \lambda, \quad a\alpha = a'\alpha',$$
$$b^2 - b'^2 = \lambda, \quad b\beta = b'\beta',$$
$$c^2 - c'^2 = \lambda, \quad c\gamma = c'\gamma',$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = -k^2 - \lambda.$$

On déduit de là :

$$a' = \sqrt{a^2 - \lambda}, \quad \alpha' = \frac{a\alpha}{\sqrt{a^2 - \lambda}},$$
$$b' = \sqrt{b^2 - \lambda}, \quad \beta' = \frac{b\beta}{\sqrt{b^2 - \lambda}},$$
$$c' = \sqrt{c^2 - \lambda}, \quad \gamma' = \frac{c\gamma}{\sqrt{c^2 - \lambda}},$$
$$-k^2 = \lambda\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2 - \lambda} - \frac{\beta^2}{b^2 - \lambda} - \frac{\gamma^2}{c^2 - \lambda}\right).$$

Supposons donnés α, β, γ, a, b, c, k. La dernière équation fournira toujours une valeur de λ, qui sera réelle et inférieure à c^2. Par suite, α', β', γ', a', b', c' seront réels et il y aura un ellipsoïde (G′) déterminé par la formule (7). Cet ellipsoïde sera d'ailleurs homofocal à l'ellipsoïde donné (G).

On a ici :

$$u^2 = u'^2 - k^2, \quad u'^2 = u^2 + k^2,$$

et par conséquent :

$$\psi(u') = \varphi(u) = \psi\left(\sqrt{u^2 + k^2}\right),$$
$$\varphi'(u) = \psi'\left(\sqrt{u^2 + k^2}\right)\frac{u}{\sqrt{u^2 + k^2}}.$$

On voit donc que :

Si l'on sait trouver l'attraction d'un ellipsoïde homogène quelconque avec la loi d'attraction exprimée par la formule

$$\psi'(r),$$

on saura également trouver l'attraction dans le cas où la loi serait repré-

sentée par la formule :

$$\psi'\left(\sqrt{r^2+k^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2+k^2}},$$

k désignant une constante arbitraire.

Par exemple, pour la loi de la nature, on a :

$$\psi'(r)=\frac{f}{r^2}.$$

Le théorème précédent permettra de trouver l'attraction avec la loi exprimée par la fonction

$$\frac{fr}{(r^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on développe cette fonction suivant les puissances entières et positives de k, les coefficients contiendront toutes les puissances paires et négatives de r. En opérant de même sur les trois composantes de l'attraction, on déterminera évidemment l'attraction de l'ellipsoïde, dans le cas où la loi d'attraction est représentée par une puissance entière paire et négative quelconque de r.

Si l'on développait suivant les puissances négatives de k^2, on trouverait de même l'attraction de l'ellipsoïde, quand la loi est représentée par une puissance entière impaire et positive quelconque de la distance.

NOTE XVII

SUR L'HERPOLHODIE ET SUR QUELQUES PROPOSITIONS RELATIVES A LA THÉORIE DE POINSOT.

I

On a vu dans le texte l'exposition des résultats de Poinsot, relatifs à la rotation autour d'un point fixe d'un corps solide qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice. Le mouvement peut être représenté géométriquement de la manière la plus claire par le roulement d'un ellipsoïde (E), ayant pour centre le point fixe, sur un plan fixe (P); la grandeur de la rotation étant à chaque instant proportionnelle au rayon vecteur qui va du centre de l'ellipsoïde au point de contact de cet ellipsoïde et du plan. Nous nous proposons d'abord de donner quelques développements relatifs à cette belle théorie de Poinsot.

Soit :

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie. Les équations d'Euler prendront ici la forme :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{a\,(c-b)}{bc}\,qr, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b\,(a-c)}{ac}\,pr, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{c\,(b-a)}{ab}\,pq, \end{aligned} \right.$$

et admettront les deux intégrales :

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = h, \\ \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = l^2. \end{cases}$$

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du pôle, c'est à dire du point où l'axe de rotation perce l'ellipsoïde (E), on aura évidemment :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}}}{\sqrt{\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

et par conséquent :

$$(4) \qquad x = \frac{p}{\sqrt{h}}, \quad y = \frac{q}{\sqrt{h}}, \quad z = \frac{r}{\sqrt{h}}.$$

La polhodie, ou route du pôle dans le corps, sera donc définie par les équations :

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z'}{c^2} = \frac{l^2}{h}, \end{cases}$$

que l'on obtient en remplaçant dans les formules (3) p, q, r par leurs expressions en fonction de x, y, z. Les équations (3) ou (5) expriment, comme on sait, que le plan tangent à l'ellipsoïde (E), en un point quelconque de la polhodie, est à une distance constante, $\frac{\sqrt{h}}{l}$, du centre de l'ellipsoïde (E). Si l'on forme une combinaison homogène des équations (5), on trouvera la relation :

$$(5)'' \qquad \frac{h - al^2}{a^2} x^2 + \frac{h - bl^2}{b^2} y^2 + \frac{h - cl^2}{c^2} z^2 = 0,$$

qui représente évidemment le cône, lieu de l'axe instantané dans le corps.

Soit M un point quelconque de l'ellipsoïde ; on a vu que le plan

tangent en M, mobile dans le corps, est fixe dans l'espace. Proposons-nous de définir la courbe décrite par le point M sur ce plan fixe et la manière dont elle est parcourue. Poinsot lui a donné le nom d'*herpolhodie* ou route serpentante du pôle.

Pour cela nous abaisserons du centre O de l'ellipsoïde une perpendiculaire sur le plan (P), tangent en M et, en désignant par I le pied de cette perpendiculaire, nous rapporterons l'herpolhodie à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le point I. On a évidemment, dans le triangle rectangle OIM :

$$\mathrm{OI} = \frac{\sqrt{h}}{l}, \quad \mathrm{IM} = \sqrt{\overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2},$$

ou en désignant par ρ le rayon vecteur IM :

$$(6) \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{l^2}}.$$

En remplaçant x, y, z en fonction des rotations et désignant par ω la grandeur de la rotation totale, on trouvera :

$$(7) \qquad \rho^2 = \frac{1}{h}\left(\omega^2 - \frac{h^2}{l^2}\right).$$

On sait comment on définit ω en fonction du temps. Si l'on ajoute aux équations (3) la relation

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

on peut exprimer p, q, r en fonction de ω, par les formules :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{p^2}{a^2}(a-b)(a-c) &= \omega^2 - (b+c)h + bcl^2, \\ \frac{q^2}{b^2}(b-a)(b-c) &= \omega^2 - (a+c)h + acl^2, \\ \frac{r^2}{c^2}(c-a)(c-b) &= \omega^2 - (a+b)h + abl^2. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs :

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}pqr.$$

Il suffira de remplacer p, q, r par leurs valeurs, pour retrouver la formule :

$$(9)\ \frac{\omega\, d\omega}{dt}$$
$$=\sqrt{-\left\{\omega^2-(b+c)h+bcl^2\right\}\left\{\omega^2-(a+c)h+acl^2\right\}\left\{\omega^2-(a+b)h+abl^2\right\}},$$

donnée à la page 236; elle fait connaître ω et par conséquent ρ en fonction du temps.

Pour définir l'herpolhodie, Poinsot a employé une méthode ingénieuse : Comme le cône, lieu de l'axe instantané dans le corps, roule sur le cône ayant pour base l'herpolhodie, les arcs correspondants décrits par le pôle, sur la polhodie et sur l'herpolhodie, seront nécessairement égaux. Or, on peut évidemment exprimer la différentielle de l'arc de la polhodie, et l'on obtiendra un résultat de la forme

$$ds = F(\omega)\, d\omega,$$

ou, en exprimant ω en fonction de ρ, au moyen de la formule (7) :

$$ds = F_1(\rho)\, d\rho.$$

Par suite de la propriété signalée par Poinsot, cette équation convient également à l'herpolhodie et suffit évidemment à la définir. Nous nous contenterons d'indiquer cette méthode, qu'il nous paraît préférable de remplacer par la suivante :

Puisque le cône, lieu de l'axe instantané dans le corps, roule sur le cône fixe ayant pour base l'herpolhodie, les aires décrites sur ces deux cônes par le rayon vecteur OM dans le même temps seront égales.

Par conséquent, si l'on considère l'aire infiniment petite décrite dans le corps par le rayon vecteur OM, pendant le temps dt, et si on la projette sur le plan tangent en M, on aura l'aire décrite dans le même temps dt par le rayon vecteur ρ, aire dont l'expression est, comme on sait :

$$\frac{1}{2}\rho^2\, d\theta,$$

θ désignant l'angle polaire relatif à l'herpolhodie.

L'aire $d\Sigma$ décrite par le rayon vecteur OM a évidemment pour

projections sur les trois plans principaux :

$$d\Sigma_x = \frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy),$$

$$d\Sigma_y = \frac{1}{2}(z\,dx - x\,dz),$$

$$d\Sigma_z = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs tirées des formules (4), et tenant compte des relations (3), on trouve pour ces projections les valeurs

$$\frac{bcp}{ah}(h - al^2)\,dt, \quad \frac{acq}{bh}(h - bl^2)\,dt, \quad \frac{abr}{ch}(h - cl^2)\,dt.$$

D'autre part, les cosinus directeurs de la normale au plan tangent en M sont :

$$\frac{p}{al}, \quad \frac{q}{bl}, \quad \frac{r}{cl}.$$

On aura donc, pour la projection de $d\Sigma$ sur le plan tangent, l'expression :

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}\rho^2\,d\theta &= d\Sigma_x\frac{p}{al} + d\Sigma_y\frac{q}{bc} + d\Sigma_z\frac{r}{cl} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{bcp^2}{a^2lh}(h - al^2) + \frac{acq^2}{b^2lh}(h - bl^2) + \frac{abr^2}{c^2lh}(h + cl^2)\right]dt. \end{aligned}$$

Or, si dans les formules (8) on remplace ω^2 par son expression en fonction de ρ^2, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p^2}{a^2}(a-b)(a-c) &= h\rho^2 + \frac{(h - bl^2)(h - cl^2)}{l^2}, \\ \frac{q^2}{b^2}(b-a)(b-c) &= h\rho^2 + \frac{(h - al^2)(h - cl^2)}{l^2}, \\ \frac{r^2}{c^2}(c-a)(c-b) &= h\rho^2 + \frac{(h - al^2)(h - bl^2)}{l^2}. \end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs de p^2, q^2, r^2 dans la formule (10) on trouve, par

un calcul très facile :

$$(11)\qquad \rho^2\, d\theta = \left[\frac{h}{l}\rho^2 + \frac{(h-al^2)(h-bl^2)(h-cl^2)}{l^2 h}\right] dt.$$

Si l'on ajoute à cette équation celle qu'on déduit de l'équation (7), en y remplaçant ω^2 par son expression en fonction de ρ :

$$(12)\ \rho\frac{d\rho}{dt}$$

$$= \sqrt{-h\left[\rho^2+\frac{(h-bl^2)(h-cl^2)}{hl^2}\right]\left[\rho^2+\frac{(h-al^2)(h-cl^2)}{hl^2}\right]\left[\rho^2+\frac{(h-al^2)(h-bl^2)}{hl^2}\right]},$$

on obtient un système de deux équations qui définissent à la fois l'herpolhodie et le mouvement du pôle sur cette courbe.

Ces deux équations appartiennent à la forme générale :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho^2\dfrac{d\theta}{dt} = m\rho^2 + n, \\ \rho\dfrac{d\rho}{dt} = k\sqrt{-\mathrm{F}(\rho^2)}, \end{array}\right.$$

ou m, n, k sont trois constantes et où $\mathrm{F}(x)$ désigne un polynome du troisième degré commençant par le terme x^3. Nous allons voir que, réciproquement, tout système de la forme (13) définit une herpolhodie, pourvu toutefois que n ait une valeur déterminée et qu'on étende la théorie de Poinsot au cas où les constantes a, b, c, qui figurent dans les formules d'Euler, ne sont plus assujetties à des relations d'inégalité et peuvent même prendre toutes les valeurs réelles.

En effet, désignons par α, β, γ les racines du polynome $\mathrm{F}(x)$. L'identification du système (13) aux formules (11) et (12), nous donne les relations :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} h = k^2, \quad m = \dfrac{h}{l}, \quad n = \dfrac{(h-al^2)(h-bl^2)(h-cl^2)}{hl^2}, \\ \alpha = -\dfrac{(h-bl^2)(h-cl^2)}{hl^2}, \beta = -\dfrac{(h-al^2)(h-cl^2)}{hl^2}, \gamma = -\dfrac{(h-al^2)(h-bl^2)}{hl^2}. \end{array}\right.$$

Ces six équations ne contiennent que cinq inconnues; elles ne pourront donc être vérifiées que s'il existe un certaine relation entre

k, m, n, α, β, γ. Cette relation se trouve d'ailleurs immédiatement, elle est :

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{n^2}{k^2}.$$

On peut l'écrire :

$$n^2 = k^2 \, F(0), \tag{15}$$

et l'on trouve alors :

$$\left\{\begin{aligned} & h = k^2, \quad l = \frac{k^2}{m}, \\ & a = \frac{m^2}{k^2} + \frac{mn}{k^2\alpha}, \quad b = \frac{m^2}{k^2} + \frac{mn}{k^2\beta}, \quad c = \frac{m^2}{k^2} + \frac{mn}{k^2\gamma}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Les formules (13) ne peuvent évidemment définir une courbe réelle que si $F(x)$ est négative pour certaines valeurs positives de x, et d'autre part l'équation de condition (15) nous montre que la même fonction sera positive pour $x = 0$. Il résulte de là que le polynome $F(x)$ aura nécessairement trois racines réelles, dont deux positives. Les valeurs de a, b, c seront donc réelles; mais elles ne seront pas nécessairement positives et, si elles sont positives, elles ne satisferont pas nécessairement aux relations d'inégalité qui caractérisent l'ellipsoïde d'inertie. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les équations :

$$\left\{\begin{aligned} & \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = m\rho^2 + n, \\ & \rho \frac{d\rho}{dt} = k\sqrt{-F(\rho^2)}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

où $F(x)$ désigne un polynome du troisième degré, pour lequel le coefficient de x^3 est égal à 1, définissent, pourvu que l'on ait :

$$n = \pm k\sqrt{F(0)}, \tag{18}$$

l'herpolhodie correspondante au mouvement de Poinsot, ou à ce mouvement dans lequel l'ellipsoïde d'inertie serait remplacé par une surface à centre quelconque du second degré.

Nous verrons qu'il y a utilité à introduire dans la théorie la considération de ces mouvements plus généraux.

On peut présenter sous un autre point de vue la définition de l'herpolhodie. Si l'on cherche la vitesse du pôle $\frac{ds}{dt}$, les équations (17) nous donnent :

$$(19) \qquad \rho^2 \frac{ds^2}{dt^2} = (m\rho^2 + n)^2 - k^2 F(\rho^2).$$

L'équation (18) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le second membre soit divisible par ρ^2, c'est à dire pour que la vitesse soit donnée par une équation de la forme :

$$(20) \qquad v^2 = -k^2\rho^4 + M\rho^2 + N.$$

On obtient donc cette nouvelle définition de la trajectoire du pôle :

L'herpolhodie est une courbe parcourue par un point dont la vitesse aréolaire $\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ est à chaque instant une fonction linéaire du carré du rayon vecteur, la vitesse totale étant une fonction bicarrée du même rayon, dans laquelle le coefficient de ρ^4 est négatif.

Nous indiquerons, en terminant cet article, la remarque suivante :

Les formules (11) et (12) qui déterminent l'herpolhodie relative au mouvement défini par les formules (1), (2), (3), ne présentent que les constantes k et l, associées à des fonctions symétriques des axes. On pourra donc les écrire sans résoudre l'équation du troisième degré qui détermine les axes principaux de l'ellipsoïde central. La détermination de ρ^2 ou, ce qui est la même chose, de ω^2 en fonction du temps, exigera donc l'inversion d'une intégrale elliptique; mais cette inversion une fois exécutée, la détermination des composantes de la rotation relatives aux axes quelconques auxquels est rapporté l'ellipsoïde central ne dépendra plus que d'un calcul algébrique.

On peut du reste diriger les calculs et représenter les équations de l'herpolhodie sous une forme qui mettra complètement en évidence la propriété que nous venons de signaler.

Soit :

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - Px^2 + Qx - R = 0,$$

l'équation qui détermine les carrés des axes de l'ellipsoïde central.

On a d'abord :

$$n = \frac{l^2}{h} f\left(\frac{h}{l^2}\right).$$

D'autre part, on peut écrire :

$$F(\rho^2) = \Pi\left(\rho^2 + \frac{ln}{h - al^2}\right) = \frac{1}{hnl^3}\Pi\left\{\rho^2 h + nl - al^2\rho^2\right\},$$

et par conséquent :

$$F(\rho^2) = \frac{l^3\rho^6}{hn} f\left(\frac{\rho^2 h + nl}{l^2\rho^2}\right).$$

Introduisons la variable auxiliaire :

$$u = \frac{\rho^2 h + nl}{l^2\rho^2},$$

un calcul facile nous donnera les équations :

$$(21) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\theta}{dt} = lu, & n = \dfrac{l^2}{h} f\left(\dfrac{h}{l^2}\right), \\ \dfrac{n}{l\rho^2} = u - \dfrac{h}{l^2}, & \dfrac{du^2}{dt^2} = -4l^2 f(u)\left(u - \dfrac{h}{l^2}\right), \end{array}\right.$$

qui définissent complètement l'herpolhodie. On peut leur ajouter l'équation :

$$(22) \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{ln}{\left(u - \frac{h}{l^2}\right)^2}\left[-f(u) + u^3 - \frac{h}{l^2}u^2\right],$$

qui fera connaître l'arc de la courbe. Les valeurs que peut prendre la variable u sont définies par la double condition de donner des valeurs réelles pour ρ et $\frac{du}{dt}$; c'est à dire de rendre positifs les deux produits :

$$-f(u)\left(u - \frac{h}{l^2}\right), \quad f\left(\frac{h}{l^2}\right)\left(u - \frac{h}{l^2}\right).$$

On déduit facilement de cette condition la règle suivante :

a, b, c désignant les carrés des axes rangés par ordre de grandeur,

u doit varier dans celui des intervalles (a, b) (b, c) qui ne contient pas $\frac{h}{l^2}$.

II

Les formules précédentes permettent de résoudre très aisément une question qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de travaux. La représentation de Poinsot, aussi bien que les formules, montre que l'herpolhodie est comprise entre deux cercles ayant le pôle pour centre et qu'elle serpente de l'un à l'autre. Poinsot paraît croire, comme l'indiquent les figures qui accompagnent sa *Théorie nouvelle de la Rotation d'un corps solide* (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XVI), qu'au moins dans certains cas l'herpolhodie a des points d'inflexion. La conclusion contraire a été établie en premier lieu par M. de Sparre (*Comptes rendus*, t. XCIX). Nous allons reprendre ici cette recherche en utilisant les formules démontrées à la fin de l'article précédent.

L'expression du rayon de courbure plane en coordonnées polaires est donnée par une formule que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$R = \frac{-2\,d\rho\,ds^2}{\rho^2\,d\theta^2\,d\left(\dfrac{ds^2}{\rho^4\,d\theta^2}\right)}.$$

Cette forme se prête à un calcul facile, et les équations (21), (22) nous donnent :

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{ds^2}{\rho^4\,d\theta^2} = \frac{l}{n}\left(\frac{R}{u^2} - \frac{Q}{u} + P - \frac{h}{l^2}\right),\\ &R = \sqrt{\frac{n}{l}}\,\frac{\left[u^3 - f(u) - \dfrac{h}{l^2}u^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(u - \dfrac{h}{l^2}\right)^2 (Qu - 2R)}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut obtenir les points d'inflexion, il faut exprimer que le rayon de courbure devient infini; et comme la variable u n'atteint jamais la valeur $\frac{h}{l^2}$, on a l'équation du premier degré :

$$(24)\qquad u = \frac{2R}{Q}.$$

Si l'on ne voulait pas calculer le rayon de courbure, on obtiendrait immédiatement la valeur précédente de u en écrivant l'équation

$$d\cdot\left(\frac{ds^2}{\rho^4\, d\theta^2}\right)=0,$$

qui fait connaître les points d'inflexion.

Il reste à reconnaître si la valeur de u définie par l'équation précédente correspond à des points réels. Pour cela, il faudra, d'après la règle donnée à la fin de l'article précédent, qu'en rangeant les cinq quantités a, b, c, $\frac{2R}{Q}$, $\frac{h}{l^2}$ par ordre de grandeur croissante, on trouve l'une ou l'autre des deux suites :

$$c,\quad \frac{2R}{Q},\quad b,\quad \frac{h}{l^2},\quad a,$$

$$c,\quad \frac{h}{l^2},\quad b,\quad \frac{2R}{Q},\quad a.$$

Considérons par exemple le cas où la surface qui roule est un ellipsoïde. Les relations d'inégalité qui caractérisent l'ellipsoïde d'inertie peuvent s'écrire :

$$\frac{2R}{Q}<c,\quad \frac{2R}{Q}<b,\quad \frac{2R}{Q}<a.$$

Donc, *l'herpolhodie correspondante au mouvement d'un corps solide n'a jamais de point d'inflexion.*

Mais quand la surface qui roule est un ellipsoïde qui ne satisfait pas aux conditions précédentes, on a toujours $\frac{2R}{Q}<b$, $\frac{2R}{Q}<a$ et les herpolhodies pour lesquelles la constante $\frac{h}{l^2}$ est supérieure à b présentent nécessairement des inflexions. Des distinctions analogues se présentent pour les hyperboloïdes; nous ne nous y arrêterons pas.

On peut encore se demander s'il existe des herpolhodies pour lesquelles la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ du rayon vecteur peut changer de signe, en sorte que le rayon vecteur, au lieu de progresser toujours

dans le même sens, ait un mouvement oscillatoire. L'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ donnée par la première des formules (21) nous montre que cette circonstance se présentera toutes les fois que u pourra prendre la valeur 0 ; ce qui aura lieu, d'après la règle donnée à l'article précédent, si les deux produits :

$$f(0)\frac{h}{l^2} = -abc\frac{h}{l^2}, \quad -f\left(\frac{h}{l^2}\right)\frac{h}{l^2},$$

sont positifs. Le premier ne pourra l'être que si la surface est un hyperboloïde à une nappe ; et la valeur du second nous montre alors que la constante $\frac{h}{l^2}$ devra être comprise entre les carrés a et b des axes réels de la surface, c'est à dire que la polhodie devra être tracée autour de l'axe réel majeur.

Il est aisé de confirmer ce résultat par quelques considérations géométriques. Pour que le rayon vecteur ait un mouvement oscillatoire, il faut évidemment que l'angle de la tangente et du rayon vecteur puisse s'annuler ou devenir égal à π. Or, dans l'herpolhodie le rayon vecteur et la tangente *sont deux tangentes conjuguées de la surface qui roule*. Elles ne pourront donc se confondre que si les courbures de la surface sont opposées, c'est à dire si la surface est réglée.

III

Le mouvement du corps est maintenant complètement défini. On connaît le cône lieu de l'axe instantané dans le corps. Ce cône (C) est du second degré et a pour base la polhodie. On connaît aussi le cône (H) ; il est transcendant et a pour base l'herpolhodie. Il suffira de faire rouler le premier cône sur le second avec une vitesse de rotation :

$$\omega = \sqrt{h}.\ \overline{\text{OM}},$$

constamment proportionnelle à OM.

On a fait à cette solution de Poinsot un reproche qui, au premier abord, paraît fondé. On objecte qu'*elle ne représente pas le temps ;* et il est certain que si on avait réalisé matériellement les deux cônes

précédents et si, par un engrenage par exemple, on les obligeait à rouler l'un sur l'autre, on n'aurait pas encore la représentation complète du mouvement; il est difficile de comprendre comment on pourrait imprimer au cône du second degré une vitesse de roulement, constamment proportionnelle à OM. Mais nous allons voir qu'on peut atteindre ce résultat en établissant un rapprochement entre la représentation précédente du mouvement et une seconde représentation, qui est encore due à Poinsot.

Conservons toutes les notations précédentes. Soit M le point de contact de l'ellipsoïde (E) et du plan (P), I la projection du centre O de l'ellipsoïde sur le plan (P). Si par le centre de l'ellipsoïde nous menons un plan (P′) parallèle au plan (P), ce plan (P′) demeurera fixe dans l'espace, comme le plan (P). Soit M′ la projection de M sur ce plan (P′). Il est clair que la rotation totale OM $\sqrt{h}$ peut se décomposer en deux; l'une dirigée suivant OI dont la valeur sera constante et égale à

$$\sqrt{h}.\,\mathrm{OI} = \frac{h}{l},$$

l'autre dirigée suivant OM′ et égale à

$$\sqrt{h}.\,\mathrm{OM}'.$$

Si donc nous imprimons au plan (P′) une rotation constante, égale à $\frac{h}{l}$, autour de OI, le mouvement de l'ellipsoïde par rapport au plan (P′) devenu ainsi mobile se réduira à la seule rotation autour de OM′. Par conséquent, si nous construisons le cône (C′) lieu des diverses positions qu'occupe la droite OM′ dans l'ellipsoïde, le mouvement relatif de l'ellipsoïde par rapport au plan (P′) se réduira au roulement du cône (C′) sur le plan (P′), la vitesse de roulement étant constamment égale à $\sqrt{h}$ OM′. Ainsi :

Le mouvement du corps peut aussi se représenter par le roulement du cône (C′) *lieu de* OM′ *sur le plan* (P′), *ce roulement s'effectuant avec la vitesse* OM′ $\sqrt{h}$, *pendant que le plan tourne avec une vitesse constante* $\frac{h}{l}$ *autour de sa normale* OI.

C'est la seconde représentation de Poinsot. Pour la définir complètement il suffira évidemment de trouver le lieu des diverses positions du point M' par rapport à l'ellipsoïde.

Or le point M' est à l'intersection de la normale en M, définie par les équations :

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c}},$$

avec le plan parallèle au plan tangent en M :

$$\frac{Xx}{a}+\frac{Yy}{b}+\frac{Zz}{c}=0.$$

Ces équations combinées donnent pour les coordonnées x', y', z' du point M' les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x\,\frac{al^2-h}{al^2},\\ y' &= y\,\frac{bl^2-h}{bl^2},\\ z' &= z\,\frac{cl^2-h}{cl^2}.\end{aligned}\right.$$

Tirons de ces équations les valeurs de x, y, z, et portons-les dans le système formé par l'équation $(5)^a$ et la seconde des équations (5). Nous aurons ainsi les deux relations :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x'^2}{a-\frac{h}{l^2}}+\frac{y'^2}{b-\frac{h}{l^2}}+\frac{z'^2}{c-\frac{h}{l^2}}=0,\\ &\frac{x'^2}{\left(a-\frac{h}{l^2}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(b-\frac{h}{l^2}\right)^2}+\frac{z'^2}{\left(c-\frac{h}{l^2}\right)^2}=\frac{l^2}{h},\end{aligned}\right.$$

qui définissent complètement le lieu de M'. D'ailleurs OM' est évidemment égal au rayon vecteur IM de l'herpolhodie, que nous avons désigné par ρ et l'on a :

$$OM'^2=\rho^2=\frac{1}{h}\left(\omega^2-\frac{h^2}{l^2}\right).$$

On peut déterminer aussi la trace laissée par le point M' sur le plan tournant (P'). Si l'on désigne en effet par θ' l'angle polaire que fait OM' avec une droite fixe OU, entraînée dans le mouvement du plan (P'), on a évidemment, puisque OM' et IM sont parallèles :

$$d\theta' = d\theta - \frac{h}{l} \cdot dt;$$

θ désignant toujours l'angle polaire, relatif à l'herpolhodie, qui figure dans la formule (11). Tirons de l'équation précédente la valeur de $d\theta$ et portons-la dans cette formule (11). Nous aurons :

$$(27) \qquad \rho^2\, d\theta' = \frac{(h - a l^2)(h - b l^2)(h - c l^2)}{h l^2}\, dt.$$

Cette relation, jointe à la formule (12), définit complètement la route tracée par le point M' sur le plan (P'). On voit que l'*aire décrite par le rayon* OM' *est proportionnelle au temps.*

Cette seconde représentation géométrique du mouvement étant bien

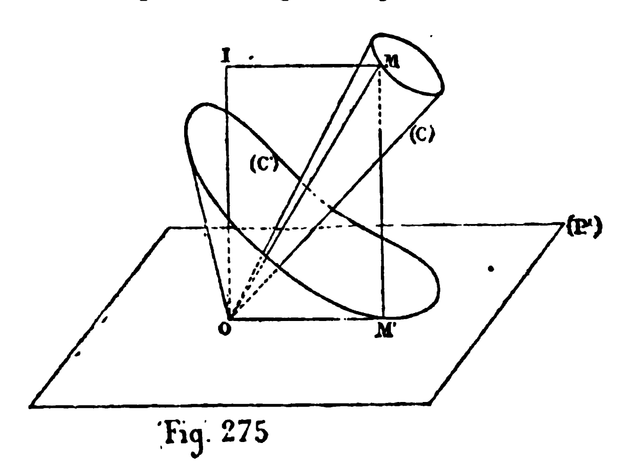


Fig. 275

comprise, considérons les deux cônes du second degré, (C) lieu de OM, (C') lieu de OM', invariablement liés l'un à l'autre ; et faisons rouler le cône (C), avec la vitesse requise, sur le cône fixe (H), ayant pour base l'herpolhodie. Le cône (C') restera en contact avec le plan invariable (P') ; mais il aura un double mouvement : il roulera sur ce plan avec la vitesse $\sqrt{h}.\ \overline{OM'}$, et il tournera en même temps autour de OI

avec la vitesse constante $\frac{h}{l}$. Rendons le plan (P′) mobile autour de OI et imaginons en même temps une disposition, par exemple un engrenage ou un état rugueux des surfaces en contact, forçant le cône (C′) à rouler sur le plan (P′). Alors, pendant le mouvement le plan (P′) sera entraîné par le cône (C′) et tournera autour de OI avec la vitesse constante $\frac{h}{l}$. Par conséquent, si l'on considère une partie quelconque du mouvement, l'angle dont ce plan aura tourné, multiplié par $\frac{l}{h}$, mesurera le temps qui s'est écoulé dans le passage de la position initiale à la position finale du corps. Inversement, si nous réalisons matériellement toute cette disposition ; le cône (H) fixe dans l'espace, les cônes (C) et (C′) invariablement liés l'un à l'autre, le cône (C) assujetti à rouler sur (H), le plan (P′) mobile autour de OI et assujetti à rouler sur le cône (C′) ; il suffira, comme il s'agit d'un système à liaison complète, de faire tourner le plan (P′) sur lui-même, avec la vitesse constante $\frac{h}{l}$, pour voir le cône (C) rouler sur (H) avec la vitesse qui est exigée par la représentation de Poinsot. Ainsi, pour obtenir cette vitesse variable, il suffira d'imprimer à un plan mobile autour d'un axe une vitesse constante de rotation.

Cette disposition, qu'un constructeur pourrait aisément réaliser, fournit l'interprétation complète des deux équations que nous avons données relativement à l'herpolhodie et qui contiennent le temps. Ce qui a motivé peut-être l'objection faite à la solution de Poinsot, c'est que cet illustre géomètre, après avoir obtenu par un procédé ingénieux la relation entre θ et ρ qui définit l'herpolhodie, s'est contenté d'indiquer, sans faire les calculs, un moyen de trouver l'autre équation, celle qui définit le mouvement du pôle sur la courbe.

IV

Dans un Mémoire inséré aux *Philosophical Transactions* (t. CLVI, 1866), *On the Motion of a Rigid Body acted on by no external Forces*, M. Sylvester a démontré relativement à la représentation de Poinsot quelques propositions curieuses et qui la complètent de la manière la

plus heureuse. Nous allons exposer ces propositions en nous plaçant à un nouveau point de vue.

Nous commencerons par démontrer le théorème de géométrie suivant :

Étant donnée une polhodie (P), *tracée sur un ellipsoïde ou sur toute autre surface à centre du second degré* (E), *si l'on porte des longueurs égales sur les normales à la surface ayant leur pied sur la polhodie, le lieu des extrémités de ces longueurs est une nouvelle polhodie* (P_1), *tracée sur une nouvelle surface* (E_1) *homofocale à une surface homothétique de* (E). *De plus les normales à la surface* (E), *aux différents points de* (P), *sont aussi normales à la surface* (E_1), *aux points correspondants de* (P_1) [1].

Si nous conservons les notations précédentes, la polhodie (P) sera définie par les équations (5). La normale en un point quelconque (x, y, z) de la polhodie aura pour équations :

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c}}.$$

La valeur commune des rapports précédents est :

$$\pm\frac{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}}{\frac{l}{\sqrt{h}}}.$$

Si donc on porte sur la normale une longueur constante $\lambda\frac{l}{\sqrt{h}}$ l'extrémité (x_1, y_1, z_1) de cette longueur sera définie par les équations :

$$\frac{x_1-x}{\frac{x}{a}}=\frac{y_1-y}{\frac{y}{b}}=\frac{z_1-z}{\frac{z}{c}}=-\lambda,$$

λ étant considéré comme positif quand la longueur constante est portée dans le sens contraire à celui de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

---

[1] On peut encore rattacher à cette théorie le théorème de géométrie suivant, dont le lecteur trouvera sans peine la démonstration :

Étant données deux surfaces concentriques (E), (E_1) *et telles que l'une soit homothétique à une surface homofocale de l'autre, elles ont une infinité de normales communes dont les pieds décrivent sur les deux surfaces des polhodies.*

On déduit des équations précédentes :

$$(28)\qquad \frac{x}{a}=\frac{x_1}{a-\lambda},\quad \frac{y}{b}=\frac{y_1}{b-\lambda},\quad \frac{z}{c}=\frac{z_1}{c-\lambda},$$

et si l'on porte les valeurs de x, y, z déduites des équations précédentes dans celles de la polhodie, on obtiendra deux relations qu'on ramènera aisément à la forme suivante :

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a-\lambda}+\dfrac{y_1^2}{b-\lambda}+\dfrac{z_1^2}{c-\lambda}=1-\dfrac{\lambda l^2}{h}, \\ \dfrac{x_1^2}{(a-\lambda)^2}+\dfrac{y_1^2}{(b-\lambda)^2}+\dfrac{z_1^2}{(c-\lambda)^2}=\dfrac{l^2}{h}. \end{cases}$$

Ces équations démontrent le théorème proposé. Elles représentent en effet une polhodie tracée sur la surface (E_1) dans laquelle les carrés des axes a', b', c' ont pour expressions :

$$(30)\qquad \begin{cases} a'=(a-\lambda)\left(1-\dfrac{\lambda l^2}{h}\right), \\ b'=(b-\lambda)\left(1-\dfrac{\lambda l^2}{h}\right), \\ c'=(c-\lambda)\left(1-\dfrac{\lambda l^2}{h}\right), \end{cases}$$

la distance du centre au plan tangent étant la valeur absolue de

$$\frac{\sqrt{h}}{l}\left(1-\frac{\lambda l^2}{h}\right).$$

Les formules (30) nous montrent que (E_1) sera bien homofocale à une surface homothétique de (E); d'autre part les équations (28) expriment que les normales aux points correspondants de (E) et de (E_1) coïncident et que par conséquent les plans tangents en ces points sont parallèles.

Cela posé, considérons le mouvement dans laquelle la première surface (E) roule sur le plan fixe (P), et soit M le point de contact. Portons sur la normale en M la longueur :

$$MM_1=\frac{\lambda l}{\sqrt{h}},$$

dans le sens déjà défini. Le plan (P_1) mené par M parallèlement au plan (P) sera fixe dans l'espace; et d'après le théorème précédent l'ellipsoïde (E_1) sera constamment en contact avec ce plan. Proposons-nous de définir le mouvement de (E_1) par rapport à (P_1).

La rotation $\overline{OM}\sqrt{h}$ peut évidemment être considérée comme la résultante d'une rotation égale à :

$$OM_1\sqrt{h},$$

dirigée suivant OM_1 et d'une rotation constante :

$$\overline{MM_1}\sqrt{h} = \lambda l,$$

dirigée suivant OI. Si la première existait seule, elle déterminerait le roulement de (E_1) sur le plan (P_1). Or, pour détruire la seconde il suffit de supposer que le plan (P_1) est lui-même animé d'une rotation constante λl autour de OI. Nous obtenons donc la proposition suivante :

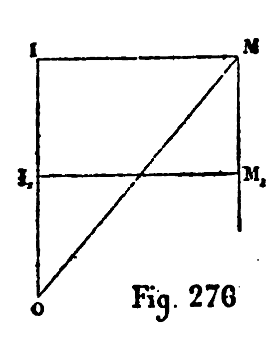


Fig. 276

Le mouvement peut être représenté par le roulement de l'une quelconque des surfaces (E_1) *sur le plan correspondant* (P_1), *tournant autour de* OI *avec la vitesse constante* λl.

Examinons quelques cas particuliers. Si l'on donne à λ une des valeurs a, b, c la surface (E_1) se réduit à une conique, qui sera, nous l'avons vu, homothétique à l'une des focales de (E). Donc :

Le mouvement peut se représenter de deux manières différentes par le roulement d'une ellipse sur un plan fixe et d'une seule manière par le roulement d'une hyperbole, chacun de ces roulements étant accompagné d'une rotation constante autour de la perpendiculaire au plan fixe [1].

---

[1] Ces trois mouvements se distinguent nettement l'un de l'autre. L'une des deux ellipses roulera en entier sur le plan et l'herpolhodie correspondante n'aura pas de point de rebroussement. Pour l'autre ellipse le pôle décrira seulement un arc de la courbe et l'herpolhodie correspondante aura des points de rebroussement, correspondants à la valeur *minimum* du rayon vecteur. Dans le cas où la courbe roulante sera une hyperbole, le pôle décrira seulement un arc de la courbe et l'herpolhodie aura des rebroussements; mais ils correspondront alors à la valeur *maximum* du rayon vecteur.

Il y aurait aussi à examiner le cas particulier où l'on a :

$$\lambda = \frac{h}{l^2},$$

mais comme il donne la seconde représentation géométrique de Poinsot étudiée à l'article précédent, il est inutile d'y revenir ici.

Parmi les surfaces (E_1) il y a évidemment deux séries d'ellipsoïdes : les uns, correspondants aux valeurs de λ supérieures à a; les autres aux valeurs de λ inférieures à c. Pour des valeurs très grandes de λ ces ellipsoïdes se rapprochent de la sphère. Il y aura donc une valeur de λ à partir de laquelle ils satisferont à la relation d'inégalité qui caractérise l'ellipsoïde d'inertie. Donc :

Le roulement d'une surface quelconque du second degré sur un plan tel que nous l'avons défini peut toujours se ramener, et d'une infinité de manières, au roulement d'un ellipsoïde d'inertie accompagné d'une rotation constante autour d'une perpendiculaire au plan invariable [1].

Si l'on veut obtenir l'herpolhodie relative au roulement de la surface (E_1), il suffira évidemment de remplacer dans les formules (11) et (12), $d\theta$ par

$$d\theta + \lambda l\, dt,$$

ce qui donnera :

$$(31)\qquad \begin{cases} \rho^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \left(-\lambda l + \dfrac{h}{l}\right)\rho^2 + n, \\ \rho\ \dfrac{d\rho}{dt} = \sqrt{-h\,F(\rho^2)}. \end{cases}$$

On peut encore obtenir les résultats de cet article par la méthode analytique suivante :

Considérons le corps mobile et supposons qu'au lieu de le rapporter

---

[1] Ici encore s'offre un moyen de représenter mécaniquement le temps. Si (E) est un ellipsoïde d'inertie, il entrainera dans son mouvement les surfaces (E_1). Si celles-ci ne peuvent que rouler sur les plans correspondants (P_1), elles entraîneront dans leur mouvement tous ces plans, qui tourneront uniformément autour de leur perpendiculaire commune menée par le centre.

à des axes fixes, on le rapporte à des axes tournant uniformément autour de la perpendiculaire OI au plan invariable.

Désignons par

$$\lambda l$$

la grandeur de la rotation imprimée aux axes. Comme elle est dirigée suivant OI, ses projections sur les axes principaux de la surface (E) s'obtiendront en multipliant par λl les cosinus $\frac{p}{al}$, $\frac{q}{bl}$, $\frac{r}{cl}$ des angles de OI avec ces axes. On aura ainsi :

$$\lambda\frac{p}{a}, \quad \lambda\frac{q}{b}, \quad \lambda\frac{r}{c},$$

pour les expressions de ces projections. Par conséquent la rotation de (E) par rapport aux axes mobiles aura pour composantes :

$$(32) \quad p' = p\left(1 - \frac{\lambda}{a}\right), \quad q' = q\left(1 - \frac{\lambda}{b}\right), \quad r' = r\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right).$$

En substituant dans les équations d'Euler les expressions de p, q, r en fonction de p', q', r', on trouvera :

$$\frac{dp'}{dt} = \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)\frac{a(c-b) \quad q'r'}{cb\left(1 - \frac{\lambda}{b}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)},$$

et les équations analogues. Or, si l'on pose :

$$(33) \quad a' = m(a-\lambda), \quad b' = m(b-\lambda), \quad c' = m(c-\lambda),$$

ces équations reprennent la forme primitive :

$$\frac{dp'}{dt} = \frac{a'(c'-b')}{c'b'}q'r', \quad \ldots$$

et par conséquent les rotations relatives p', q', r' définissent le roulement d'une surface dont les axes seraient donnés par les formules (33). Les équations (32) qu'on peut écrire :

$$(34) \qquad m\frac{p'}{a'} = \frac{p}{a}, \quad m\frac{q'}{b'} = \frac{q}{b}, \quad m\frac{r'}{c'} = \frac{r}{c},$$

montrent que la direction du plan invariable n'a pas changé; ce qui achève d'établir la proposition de M. Sylvester.

Si l'on désigne par l' et h' les nouvelles valeurs de l et de h, on trouve, comme conséquence des relations établies :

$$(35) \qquad \begin{cases} m' l'^2 = l^2, \\ m h' = h - \lambda l^2. \end{cases}$$

Les propositions que nous venons de démontrer permettent de présenter l'interprétation géométrique d'un résultat de Jacobi qui résulte d'ailleurs immédiatement de la théorie de Poinsot. Imaginons que l'on considère cette période du mouvement pendant laquelle le pôle instantané décrit entièrement la polhodie. Il est clair que, lorsque la révolution du pôle sera achevée, le corps sera dans la même situation que s'il avait tourné, tout d'une pièce, d'un certain angle autour de la perpendiculaire OI au plan invariable. Si donc, au lieu de rapporter le mouvement à des axes fixes, on suppose que les axes Ox, Oy situés dans le plan invariable soient animés d'une rotation uniforme, de manière à tourner du même angle que le corps dans la période du mouvement considérée, on voit que le mouvement relatif à ces axes mobiles sera oscillatoire et périodique. Le mouvement absolu peut donc être considéré comme se composant d'une rotation constante autour de OI et d'un mouvement oscillatoire auquel Jacobi a donné le nom de *mouvement oscillatoire moyen*. Les remarques précédentes permettent de le définir géométriquement.

Nous avons vu que ce mouvement peut être représenté par le roulement d'une surface sur un plan. Mais ici l'herpolhodie doit être une courbe fermée pour laquelle l'angle polaire θ reprendra la même valeur après une révolution complète. Et par conséquent la surface qui roule devra être, comme nous l'avons établi, un hyperboloïde à une nappe. On peut même ajouter que, dans ce cas, la polhodie sera tracée autour de l'axe réel majeur de la surface.

Les équations déjà données de l'herpolhodie vont nous permettre de déterminer le mouvement oscillatoire moyen.

Reprenons en effet les équations (31) et soient α et β les valeurs extrêmes de ρ. L'angle total Θ_0 dont tournera le rayon vecteur quand ρ

varie de β à α est donné par la relation :

$$(36)\quad \Theta_n = -\left(\lambda l - \frac{h}{l}\right)\int_\beta^\alpha \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{-hF(\rho^2)}} + n\int_\beta^\alpha \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-hF(\rho^2)}}.$$

Il suffira de déterminer λ par la condition que cet angle s'annule et l'on connaîtra ensuite le mouvement (E_1).

NOTE XVIII

SUR LA THÉORIE DE POINSOT ET SUR DEUX MOUVEMENTS DIFFÉRENTS, CORRESPONDANTS A LA MÊME POLHODIE.

I

Dans la note précédente nous avons considéré la généralisation du mouvement de Poinsot qui consiste à faire rouler sur un plan, non plus un ellipsoïde, dont les axes sont même assujettis à certaines relations d'inégalité, mais une surface quelconque à centre du second degré. Ce mouvement est défini par les équations :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{a\,(c-b)}{bc}\,qr,\\ \frac{dq}{dt} &= \frac{b\,(a-c)}{ac}\,pr,\\ \frac{dr}{dt} &= \frac{c\,(b-a)}{ab}\,pq, \end{aligned}\right.$$

où a, b, c désignent les carrés des axes de la surface qui roule sur le plan fixe. Les rapports de ces constantes entrant seuls dans les équations, il est clair, ce qui est d'ailleurs évident géométriquement, que l'on pourra, dans la définition du mouvement, remplacer la surface par une surface homothétique.

Si, au lieu des équations précédentes, on prenait les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \alpha_1\,qr,\\ \frac{dq}{dt} &= \beta_1\,pr,\\ \frac{dr}{dt} &= \gamma_1\,pq, \end{aligned}\right.$$

on aurait, il est aisé de le reconnaître, un mouvement plus général. Pour que les équations (2) puissent en effet être identifiées aux équations (1), il faudra que l'on puisse trouver des nombres a, b, c dont les rapports satisfassent aux trois équations :

$$(3) \qquad \alpha_1 = \frac{a\,(c-b)}{bc}, \quad \beta_1 = \frac{b\,(a-c)}{ac}, \quad \gamma_1 = \frac{c\,(b-a)}{ab}.$$

L'élimination des rapports de a, b, c conduit à la relation suivante :

$$(4) \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_1 = 0,$$

qui doit être satisfaite pour que les équations (2) définissent le mouvement correspondant aux formules (1) et auquel nous donnerons, par un juste hommage, le nom de *mouvement de Poinsot*.

Il résulte de là que, lorsqu'on aura obtenu un mouvement de Poinsot, dans lequel les rotations satisfont aux équations (1), on en aura une infinité d'autres pour lesquelles les rotations p', q', r' seront, à chaque instant, égales aux rotations p, q, r, multipliées par des nombres constants. Si l'on pose en effet :

$$(5) \qquad p' = \alpha' p, \quad q' = \beta' q, \quad r' = \gamma' r,$$

p', q', r' satisfont à des équations de la forme (2) dans lesquelles les constantes α_1, β_1, γ_1 ont les valeurs suivantes :

$$(6) \quad \alpha_1 = \frac{a\,(c-b)}{bc}\,\frac{\alpha'}{\beta'\gamma'}, \quad \beta_1 = \frac{b\,(a-c)}{ac}\,\frac{\beta'}{\alpha'\gamma'}, \quad \gamma_1 = \frac{c\,(b-a)}{ab}\,\frac{\gamma'}{\alpha'\beta'}.$$

En exprimant que ces valeurs vérifient l'équation (4), on aura l'unique condition à laquelle doivent satisfaire α', β', γ' :

$$(7)\; a^2\,(c-b)\,(\alpha'^2-1) + b^2\,(a-c)\,(\beta'^2-1) + c^2\,(b-a)\,(\gamma'^2-1) = 0.$$

Il restera donc deux constantes arbitraires.

L'étude des relations entre tous les mouvements qui sont ainsi associés à un mouvement donné, mériterait d'être faite avec soin. La théorie de M. Sylvester que nous avons développée dans la Note précédente repose précisément sur la considération de quelques-uns d'entre eux. Nous ne voulons pas entreprendre ici leur étude

générale; nous allons seulement examiner un cas très particulier qui, comme nous le verrons, est susceptible d'une application très digne d'intérêt.

II

Considérons un mouvement de Poinsot, défini par les équations (1) jointes à l'intégrale des forces vives :

$$(8) \qquad \frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = h$$

et à l'intégrale des aires que l'on peut évidemment écrire, en multipliant a, b, c par une constante convenablement choisie :

$$(9) \qquad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = 1.$$

Les résultats établis à l'article précédent montrent que si l'on prend le mouvement dans lequel les rotations sont :

$$(10) \qquad p' = -p, \quad q' = -q, \quad r' = -r,$$

ce sera encore un mouvement de Poinsot. La relation (7) est en effet vérifiée par les valeurs :

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = -1.$$

Ainsi, d'un premier mouvement (E), défini par les formules (1), (8) et (9), on peut en déduire un autre (E'), dans lequel la rotation est à chaque instant égale et contraire à celle du premier mouvement. Nous allons étudier la relation, qui est évidemment réciproque, entre ces deux mouvements. Si nous désignons par a', b', c', h' les constantes relatives au mouvement (E'), l'intégrale des forces vives et l'intégrale des aires dans ce nouveau mouvement seront :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{p^2}{a'} + \frac{q^2}{b'} + \frac{r^2}{c'} = h', \\ & \frac{p^2}{a'^2} + \frac{q^2}{b'^2} + \frac{r^2}{c'^2} = 1, \end{aligned} \right.$$

et il faudra évidemment exprimer que ces deux équations s'obtiennent en combinant linéairement les relations (8) et (9). On obtient ainsi le système :

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a'} = \dfrac{\lambda}{a} + \dfrac{\mu}{a^2}, & \dfrac{1}{a'^2} = \dfrac{\lambda'}{a} + \dfrac{\mu'}{a^2}, \\ \dfrac{1}{b'} = \dfrac{\lambda}{b} + \dfrac{\mu}{b^2}, & \dfrac{1}{b'^2} = \dfrac{\lambda'}{b} + \dfrac{\mu'}{b^2}, \\ \dfrac{1}{c'} = \dfrac{\lambda}{c} + \dfrac{\mu}{c^2}, & \dfrac{1}{c'^2} = \dfrac{\lambda'}{c} + \dfrac{\mu'}{c^2}, \\ h' = \lambda h + \mu, & 1 = \lambda' h + \mu', \end{cases}$$

qui contient implicitement toutes les relations entre les deux mouvements.

Ces formules nous donnent deux expressions différentes pour chacun des axes a', b', c'. En les égalant, nous avons un système de trois équations, qui expriment que a, b, c sont les racines de l'équation du troisième degré :

$$(13)\qquad (\lambda' x + \mu')\, x^2 - (\lambda x + \mu)^2 = 0.$$

Posons pour abréger :

$$(14)\qquad \begin{cases} a + b + c = \mathrm{P}, \\ ab + ac + bc = \mathrm{Q}, \\ abc = \mathrm{R}. \end{cases}$$

En écrivant que l'équation (13) a mêmes racines que la suivante :

$$x^3 - \mathrm{P}x^2 + \mathrm{Q}x - \mathrm{R} = 0,$$

on aura les conditions :

$$\lambda^2 - \mu' = \lambda' \mathrm{P}, \qquad 2\lambda\mu = -\lambda' \mathrm{Q}, \qquad \mu^2 = \lambda' \mathrm{R},$$

qui, jointes aux deux dernières formules (12), vont nous donner λ, λ', μ, μ' et h'.

Désignons par Ω^2 la quantité définie par la formule :

$$(15)\qquad \Omega^2 = \mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{R}(\mathrm{P} - h),$$

nous trouverons :

$$(16) \qquad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{2Q}{\Omega}, & \mu = \dfrac{2R}{\Omega}, \\ \lambda' = \dfrac{4R}{\Omega^2}, & \mu' = \dfrac{Q^2 - 4RP}{\Omega^2}, \end{cases}$$

et les formules (12) nous donneront a', b', c', h'. Introduisons les notations suivantes :

$$(17) \qquad \begin{cases} \alpha = ab + ac - bc = Q - \dfrac{2R}{a}, \\ \beta = ab + bc - ac = Q - \dfrac{2R}{b}, \\ \gamma = bc + ac - ba = Q - \dfrac{2R}{c}, \end{cases}$$

nous aurons les formules :

$$(18) \qquad \begin{cases} a' = \dfrac{a\Omega}{\alpha}, \quad b' = \dfrac{b\Omega}{\beta}, \quad c' = \dfrac{c\Omega}{\gamma}, \\ h' = \dfrac{Qh - 2R}{\Omega}, \end{cases}$$

qui résolvent complètement la question proposée. Si l'on désigne par α', β', γ', Ω' les quantités analogues à α, β, γ, Ω et relatives au second mouvement, on en déduit les formules :

$$(19) \qquad \Omega' = \Omega, \quad \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \Omega^2,$$

qui mettent en évidence la réciprocité entre les deux mouvements. Signalons encore les relations :

$$(20) \qquad \frac{\alpha^2 (h' - a')}{h - a} = \frac{\beta^2 (h' - b')}{h - b} = \frac{\gamma^2 (h' - c')}{h - c} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\Omega}.$$

Toutes les fois que le premier mouvement sera réel, il en sera de même du second. Il suffira, pour le prouver, de faire voir que la quantité

$$\Omega^2 = Q^2 - 4R(P - h)$$

est positive. Or, h étant nécessairement comprise entre a et c, le carré de Ω sera compris entre les deux quantités :

$$Q^2 - 4R(P - a), \quad Q^2 - 4R(P - c),$$

qui sont essentiellement positives; car l'une est le carré de α et l'autre le carré de γ.

Bien plus, les relations (19) nous montrent que α, β, γ auront respectivement le même signe que α', β', γ'; et par conséquent si la surface correspondante au premier mouvement est un ellipsoïde d'inertie, il en sera de même de la surface correspondante au second.

III

Après avoir défini les relations entre les deux mouvements (E), (E_1), nous allons déduire quelques conséquences qui résultent de leur considération simultanée. Soit (C) le système des axes mobiles formé par les axes principaux des deux surfaces (E), (E_1), correspondantes aux deux mouvements. Si l'on construit le point dont les coordonnées par rapport à ces axes sont p, q, r, il décrira une même polhodie (P) qui sera commune aux deux mouvements. Dans le premier mouvement (E), le cône (C) ayant pour base cette polhodie roulera, avec une vitesse égale au rayon vecteur, sur un cône fixe (A) ayant pour base une herpolhodie (H); dans le second mouvement (E'), le même cône (C) roulera avec une vitesse égale, mais en sens contraire, sur un autre cône fixe (B), ayant pour base une autre herpolhodie (H'); et *la génératrice de contact du cône* (C) *avec les deux cônes fixes sera la même à chaque instant dans les deux mouvements*. Au lieu de considérer les deux mouvements différents du système (C) par rapport aux systèmes (A) et (B), rendons le système (C) fixe et observons les mouvements de (A) et de (B) par rapport à (C). Dans ces deux mouvements (E'), (E'_1), inverses des précédents, les deux cônes (A) et (B) rouleront sur le cône (C), ayant pour base la polhodie (P); mais *de plus la génératrice de contact sera la même à chaque instant* et par conséquent *les deux cônes rouleront l'un sur l'autre*. Il suit de là que :

Le mouvement de (B) *par rapport à* (A) *s'obtiendra en faisant rouler*

directement le cône ayant pour base l'herpolhodie (H') *sur le cône ayant pour base l'herpolhodie* (H).

Dans ce mouvement les deux courbes (H), (H') seront constamment en contact et la vitesse de rotation sera double du rayon vecteur qui va du centre au point de contact.

Nous verrons que c'est à ce mouvement de (B) par rapport à (A) que peut se ramener dans tous les cas celui d'un corps pesant de révolution suspendu par un point de son axe.

IV

Il nous reste à faire connaître une proposition qui se rattache aux précédentes et qui concerne la polhodie.

L'intersection de deux surfaces du second degré concentriques et ayant les axes principaux dirigés suivant les mêmes droites, peut en général être considérée, et de deux manières différentes, comme une polhodie.

Soient en effet :

$$\left\{\begin{array}{l} A x^2 + B y^2 + C z^2 = D, \\ A' x^2 + B' y^2 + C' z^2 = D', \end{array}\right.$$

les équations d'une telle courbe. La proposition sera démontrée, si nous établissons qu'on peut les ramener à la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = l^2, \end{array}\right.$$

où a, b, c, h, l sont des constantes quelconques. Il faudra donc exprimer que ces dernières équations sont des combinaisons linéaires des premières. On trouve ainsi pour a, b, c les deux équations :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{c^2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui sont évidemment de la forme :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=0,\\ &\frac{m}{a^2}+\frac{n}{b^2}+\frac{p}{c^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Elles déterminent en général deux systèmes de valeurs différentes pour les rapports des axes. Ces valeurs seront réelles toutes les fois que l'on aura :

$$mnp\,(m+n+p)<0.$$

Dans ce cas, la courbe sera une polhodie tracée sur deux surfaces réelles ; et les deux mouvements correspondants seront ceux dont nous venons d'étudier les relations.

Si l'inégalité précédente n'était pas vérifiée, les deux mouvements précédents deviendraient imaginaires.

Enfin si l'on a :

$$mnp\,(m+n+p)=0,$$

la courbe est plane ou tracée sur une sphère et elle ne peut pas en général devenir une polhodie.

Le cas où la somme de deux des trois quantités m, n, p est nulle, mérite une mention spéciale. Supposons par exemple :

$$m+n=0.$$

Les équations (19) admettent alors la solution :

$$a=b,\qquad c=\infty.$$

L'une des deux surfaces pour lesquelles la courbe est une polhodie se réduit à un cylindre, de révolution autour de l'axe des z. Dans le mouvement correspondant le cylindre de révolution demeure en contact avec un plan fixe ; mais la génératrice de contact tourne autour du pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur ce plan, avec une vitesse angulaire constante.

L'herpolhodie correspondante est définie par les formules de la page 493, où l'on aurait :

$$n=\mathrm{F}(0)=0.$$

Quant au second mouvement correspondant à la même courbe, il présente cette seule particularité que la quantité désignée par γ dans les formules (17) est égale à zéro.

Pour toute polhodie tracée sur une surface dont les axes satisfont à cette relation :

$$\gamma = 0,$$

le second mouvement ne sera autre que celui dont nous venons d'indiquer rapidement la définition.

La proposition que nous venons d'étudier est due à M. de La Gournerie qui l'a démontrée dans ses *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, page 165. Cet excellent géomètre n'a rien fait connaître sur la partie mécanique ou cinématique de la question dont nous nous occupons; mais en utilisant quelques propositions de géométrie qu'il a données en différentes parties de son ouvrage, on peut compléter en plusieurs points les résultats précédents et définir les relations géométriques qui existent entre les deux surfaces du second degré dont la courbe d'intersection est une polhodie à la fois pour les deux surfaces. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

La courbe d'intersection de deux surfaces du second degré ayant les mêmes axes principaux est normale à une infinité de surfaces homofocales du second degré formant une des trois familles d'un système orthogonal.

Rapportons en effet cette courbe (C) à ses axes principaux. On peut évidemment exprimer les coordonnées x, y, z d'un de ses points, en fonction d'un paramètre variable ρ, par des équations de la forme :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= m\,(a-\rho), \\ y^2 &= n\,(b-\rho), \\ z^2 &= p\,(c-\rho), \end{aligned} \right.$$

a, b, c, m, n, p désignant des constantes.

La surface du second degré déterminée par l'équation :

$$(21) \qquad \frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} = m + n + p,$$

passe évidemment par le point considéré de la courbe et on vérifiera aisément qu'elle est normale à la courbe en ce point. La proposition est donc démontrée.

Dans le cas où l'on a :

$$m + n + p = 0,$$

la courbe (C) est tracée sur une sphère, et les surfaces normales sont des cônes homofocaux. En écartant ce cas exceptionnel, on peut multiplier a, b, c, ρ par une constante et disposer de cette constante de telle manière que l'on ait :

$$m + n + p = 1.$$

Alors l'équation prendra la forme :

$$\frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} = 1. \tag{22}$$

Il résulte des formules (20) que l'intervalle dans lequel varient les valeurs de ρ correspondantes aux points réels de la courbe (C) ne peut comprendre aucun des trois nombres a, b, c. Par conséquent l'équation (22) ne pourra représenter que l'une des trois familles d'un système triple orthogonal.

Puisque la courbe (C) est normale à toutes les surfaces représentées par l'équation (22), nous pouvons conclure qu'elle est l'intersection de deux surfaces réelles, appartenant respectivement aux deux autres familles du système orthogonal, et nous retrouvons ce théorème de M. de La Gournerie (1).

Toute courbe tracée sur deux surfaces du second degré ayant les mêmes axes principaux peut toujours être considérée comme l'intersection de deux surfaces homofocales réelles pour lesquelles elle est une ligne de courbure commune.

Les paramètres ρ_1, ρ_2 de ces deux surfaces seront définis par les équations :

$$m = \frac{(a-\rho_2)(a-\rho_1)}{(a-b)(a-c)}, \quad n = \frac{(b-\rho_2)(b-\rho_1)}{(b-a)(b-c)},$$

$$p = \frac{(c-\rho_2)(c-\rho_1)}{(c-a)(c-b)}.$$

(1) Ouvrage cité, p. 163.

ce seront les racines de l'équation du second degré en u :

$$\frac{m}{a-u}+\frac{n}{b-u}+\frac{p}{c-u}=0.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer les deux surfaces pour lesquelles la courbe (C) est une polhodie. L'équation générale des surfaces qui contiennent cette courbe est :

$$\frac{(a-k)\,x^2}{(a-\rho_1)(a-\rho_2)}+\frac{(b-k)\,y^2}{(b-\rho_1)(b-\rho_2)}+\frac{(c-k)\,z^2}{(c-\rho_1)(c-\rho_2)}=1;$$

k désignant un paramètre variable.

La distance P du centre au plan tangent en un point de la surface est donnée par l'équation :

$$\frac{1}{P^2}=\frac{(a-k)^2\,x^2}{(a-\rho_1)^2(a-\rho_2)^2}+\frac{(b-k)^2\,y^2}{(b-\rho_1)^2(b-\rho_2)^2}+\frac{(c-k)^2\,z^2}{(c-\rho_1)^2(c-\rho_2)^2}.$$

Remplaçons x^2, y^2, z^2 par leurs valeurs relatives à un point de la courbe; et, pour exprimer que la distance P est invariable, annulons le coefficient de ρ dans $\frac{1}{P^2}$. Nous aurons l'équation :

$$\frac{(a-k)^2}{(a-\rho_1)(a-\rho_2)(a-b)(a-c)}+\frac{(b-k)^2}{(b-\rho_1)(b-\rho_2)(b-a)(b-c)}$$
$$+\frac{(c-k^2)}{(c-\rho_1)(c-\rho_2)(c-a)(c-b)}=0,$$

à laquelle on peut donner la forme plus simple :

$$\frac{(\rho_1-k)^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}=\frac{(\rho_2-k)^2}{(a-\rho_2)(b-\rho_2)(c-\rho_2)}.$$

Cette équation nous donnera, comme il fallait s'y attendre, deux valeurs de k. Ces valeurs ne seront réelles que si le quotient

$$\frac{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)}{(a-\rho_2)(b-\rho_2)(c-\rho_2)}$$

est positif, c'est à dire si ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les paramètres

d'un ellipsoïde et d'un hyperboloïde à deux nappes. Nous sommes ainsi conduits à cette nouvelle proposition :

La courbe (C), *toutes les fois qu'elle n'est pas sphérique, est une polhodie tracée sur deux surfaces différentes ; mais ces surfaces ne sont réelles que dans le cas où les surfaces normales à la courbe sont des hyperboloïdes à une nappe.*

Au moyen des formules données, on vérifiera aisément la proposition suivante qui confirme le résultat précédent.

Si l'on construit l'hyperboloïde qui est normal en un point quelconque M *de la courbe* (C), *les deux génératrices rectilignes de cet hyperboloïde qui passent en* M *sont les normales, en ce même point, aux deux surfaces pour lesquelles la courbe est une polhodie.*

V

Tous ces hyperboloïdes homofocaux, normaux à une même polhodie, possèdent une remarquable propriété cinématique que nous allons d'abord établir.

On connaît la correspondance qu'a établie Ivory entre les points de deux ellipsoïdes homofocaux; la méthode d'Ivory peut évidemment être appliquée à deux surfaces homofocales d'une même famille et en particulier à deux hyperboloïdes à une nappe homofocaux. Les points correspondants sur ces deux surfaces se trouveront sur une même trajectoire orthogonale de la famille des hyperboloïdes homofocaux, et le théorème précédent pourra évidemment s'énoncer de la manière suivante :

La polhodie (C) *est le lieu des points correspondants d'un point donné d'un hyperboloïde à une nappe sur tous les hyperboloïdes homofocaux.*

La correspondance établie par Ivory étant, comme on sait, une transformation homographique, les génératrices rectilignes de l'un des hyperboloïdes auront nécessairement pour correspondantes les génératrices rectilignes sur tous les autres hyperboloïdes homofocaux. Considérons sur un des hyperboloïdes un segment déterminé de l'une quelconque d'entre elles; quand on passera de cette surface à toutes les autres, ce segment demeurera rectiligne; de plus les trajectoires de ses extrémités seront normales à la surface sur laquelle il se trouve et par suite au segment lui-même. Donc, la longueur de ce segment

demeurera constante et nous pouvons énoncer la proposition suivante, due à M. Greenhill (¹).

L'hyperboloïde à une nappe est susceptible d'une déformation dans laquelle les génératrices rectilignes demeurent rectilignes, les longueurs des côtés de tous les quadrilatères gauches formés par ces génératrices demeurant invariables. Si on le dispose dans l'espace de telle manière que son centre et les directions de ses axes restent fixes, il demeurera constamment homofocal à lui-même, et les trajectoires de ses différents points seront normales à ses positions successives.

Il y a deux faits intéressants dans cette proposition. Signalons d'abord la possibilité de déformer le réseau formé par les génératrices rectilignes des deux systèmes, de telle manière que leurs points d'intersection demeurent toujours les mêmes. Avant d'être étudiée par la théorie, cette propriété avait été utilisée par la pratique, au moins dans le cas où la surface est de révolution. Tout le monde connaît ces ingénieux appareils qui servent de cache-pot, qui sont formés de deux systèmes de tiges rigides, rattachées les unes aux autres à leurs points d'intersection et qui sont susceptibles d'une déformation très étendue. Il est aisé d'ailleurs de reconnaître que cette déformation de l'hyperboloïde est la seule possible; il suffit de remarquer que la forme de tout le système est déterminée dès que l'on donne l'angle formé par deux génératrices déterminées. Si l'on considère en effet la figure formée par deux génératrices d'un même système et trois génératrices de l'autre système qui rencontrent les deux premières, on reconnaîtra aisément qu'elle est complètement déterminée de forme dès qu'on donne un seul de ses angles.

La proposition précédente donne lieu à une seconde remarque; c'est que l'on peut disposer dans l'espace les formes successives que prend l'hyperboloïde de telle manière que la trajectoire de chaque point soit normale aux positions successives de la surface. Cette propriété donne un moyen simple d'engendrer la polhodie. Il suffira de déformer l'hyperboloïde de telle manière que le losange formé par ses quatre

(¹) Voir dans le Journal *The Messenger of Mathematics*, t. 8, p. 51, une note de M. Cayley, *On the Deformation of a Model of a Hyperboloïd*, qui contient une démonstration analytique du théorème de M. Greenhill.

sommets ait toujours les mêmes droites pour diagonales; un point quelconque de l'hyperboloïde décrira une polhodie tracée sur une surface (E) qui sera normale à toutes les positions de l'une des génératrices rectilignes qui passent par le point. Il suit de là que toutes les polhodies tracées par les différents points d'une même génératrice rectiligne formeront le système que nous avons étudié à l'article IV de la Note XVII. Cette remarque trouvera plus loin son application.

Puisque dans le mouvement précédent un point quelconque décrit une polhodie, le plan normal à l'une des génératrices rectilignes en ce point demeurera à une distance constante du centre de la surface. Comme d'ailleurs deux points diamétralement opposés par rapport au centre dans une des positions de l'hyperboloïde conservent toujours cette relation dans toutes les autres, deux génératrices, parallèles dans l'une des positions de la surface, demeureront toujours parallèles et les plans normaux à ces génératrices en deux points déterminés demeureront toujours à une distance constante l'un de l'autre. Cette propriété de la déformation jouera un rôle essentiel dans ce qui va suivre. On en déduit par exemple le théorème suivant :

Si l'on déforme un hyperboloïde en laissant fixe une génératrice (g), *tous les points de la génératrice* (g_1), *parallèle à* (g), *décrivent des plans, perpendiculaires à* (g).

Il est clair que tous les autres points de l'hyperboloïde décrivent des sphères ayant leur centre sur (g); et comme d'autre part toute génératrice (g_2) de même système que (g) rencontre (g_1), il y aura toujours un point de (g_2) qui décrira un plan. Donc :

Si une droite invariable (g_2) a trois de ses points assujettis à décrire des sphères ayant leur centre sur (g), il y aura toujours un point de (g_2) qui décrira un plan perpendiculaire à la ligne des centres (g); tous les autres décriront des sphères ayant leur centre sur (g) (¹).

Revenons au mouvement de Poinsot et considérons une surface (E) sur laquelle est tracée une polhodie (C). Soit O le centre de (E), M un point de la polhodie et (P) le plan tangent en M sur lequel roule la

(¹) Ce théorème présente un cas d'exception correspondant au cas où l'hyperboloïde qui se déforme serait remplacé par un paraboloïde. Alors la droite (g_2) fait un angle constant avec la ligne des centres.

surface (E), avec une vitesse de roulement que nous supposerons égale au rayon vecteur qui va au point de contact. Considérons l'hyperboloïde (H) de centre O normal au point M de la courbe (C) et construisons l'hyperboloïde (H') homothétique de (H) par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$. Quand la surface (E) roulera sur le plan (P), l'hyperboloïde (H') variera et puisqu'il est semblable à (H), ses différentes formes pourront se déduire de l'une d'entre elles par le mode de déformation que nous venons d'étudier. Les deux génératrices passant en M seront celles de l'hyperboloïde (H) ; de plus, comme la surface (H) passait par le point M' diamétralement opposé à M, la surface (H') passera par le centre O, et les deux génératrices rectilignes menées par ce point seront parallèles à celles qui passent en M. L'une d'elles sera par conséquent perpendiculaire au plan invariable (P) et demeurera fixe dans l'espace. Si nous remarquons de plus que le plan tangent en M est perpendiculaire à la route de ce point dans le plan (P), nous serons conduits au théorème suivant :

Si l'on déforme l'hyperboloïde (H') *de telle manière que l'une de ses génératrices* (g) *demeure fixe et coïncide avec la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan* (P), *le point m diamétralement opposé à* O *sera toujours dans le plan* (P). *Si on l'oblige à décrire une courbe qui soit normale aux positions successives de l'hyperboloïde, cette courbe sera une herpolhodie.*

Si l'on assujettissait les autres points de la génératrice (g_1), parallèle à (g), à décrire de même des courbes normales à l'hyperboloïde, on obtiendrait évidemment toutes les herpolhodies dont l'équation générale a été donnée à la page 508. Soient (h), (h') deux de ces herpolhodies décrites, l'une par le point m dans le plan (P), l'autre par le point m' dans le plan parallèle (P'). Rendons ce plan mobile autour de la perpendiculaire abaissée par le point O et imaginons une disposition qui force le point m' à rester sur (h'). Quand le point m décrira la courbe (h), le point m', devant demeurer sur (h'), fera tourner e plan (P') avec une vitesse de rotation constante qui, nous l'avons vu, sera représentée par la droite $m'm$ (p. 507). Inversement si l'on imprime au plan (P') cette rotation constante, le point m décrira l'herpolhodie (h) avec la vitesse qui est prescrite par la théorie de Poinsot.

Si nous remarquons d'ailleurs que l'on peut rattacher l'hyperboloïde (H) à l'hyperboloïde (H'); que l'un de ces hyperboloïdes entraîne l'autre en déterminant à la fois sa forme et sa position, puisqu'ils ont en commun les deux génératrices rectilignes qui se croisent en m, on reconnaîtra que le mouvement de l'hyperboloïde (H) est complètement défini. Or les axes de cet hyperboloïde coïncident avec ceux de la surface (E). On voit donc que la théorie précédente donne un moyen nouveau de réaliser le mouvement de Poinsot par l'emploi de systèmes articulés. Le corps dont il s'agit d'étudier le mouvement sera représenté par le trièdre trirectangle dont les arêtes sont les axes principaux de l'hyperboloïde (H).

NOTE XIX

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION, FIXÉ PAR UN POINT DE SON AXE.

I

Dans l'article III de la Note précédente, nous avons défini un certain mouvement qui est produit par le roulement du cône (B), ayant pour base une herpolhodie (H′), sur un cône (A) ayant pour base une autre herpolhodie (H). Considérons les deux mouvements (E), (E_1) correspondants à une même polhodie (P), le premier se représente par le roulement du cône (C), ayant pour base la polhodie sur le cône (A), avec une vitesse constamment égale au rayon vecteur. Le mouvement (E'_1) inverse de (E_1) se représente par le roulement du cône (B) sur le cône (C); et dans les deux mouvements la génératrice de contact avec le cône (C) est la même. Si l'on définit la rotation par ses composantes relatives aux axes principaux du cône (C), dans les deux mouvements ces composantes sont :

$$p, q, r;$$

par suite, dans le mouvement de (B) par rapport à (A), les composantes de la rotation totale, relatives aux mêmes axes, seront :

$$2p, \quad 2q, \quad 2r.$$

On a, comme on l'a vu :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{p^2}{a} + \dfrac{q^2}{b} + \dfrac{r^2}{c} = h, & \dfrac{p^2}{a'} + \dfrac{q^2}{b'} + \dfrac{r^2}{c'} = h', \\ \dfrac{p^2}{a^2} + \dfrac{q^2}{b^2} + \dfrac{r^2}{c^2} = 1, & \dfrac{p^2}{a'^2} + \dfrac{q^2}{b'^2} + \dfrac{r^2}{c'^2} = 1, \end{cases}$$

a', b', c', h' ayant les valeurs définies précédemment. De plus les cosinus-directeurs de la perpendiculaire au plan de l'herpolhodie (H) sont, par rapport aux mêmes axes :

$$\frac{p}{a}, \quad \frac{q}{b}, \quad \frac{r}{c},$$

et les cosinus-directeurs de la perpendiculaire au plan de l'herpolhodie (H') sont :

$$\frac{-p}{a'}, \quad \frac{-q}{b'}, \quad \frac{-r}{c'}.$$

Cela posé, nous supposerons que le système mobile (B) entraîne un corps solide dans son mouvement; et nous allons chercher quelles sont les forces capables de produire le mouvement que nous venons de définir.

La supposition la plus naturelle et en même temps la plus simple consiste à admettre que le corps solide entraîné est une sphère ayant pour centre le point fixe; ou du moins, ce qui revient au même, que l'ellipsoïde d'inertie de ce corps, qui peut être hétérogène et de forme quelconque, est une sphère pour le point fixe O.

Soit A la valeur du moment d'inertie pour un rayon quelconque de cette sphère. Les composantes de la rotation étant :

$$2p, \quad 2q, \quad 2r,$$

les projections sur les mêmes axes coordonnés de l'axe du couple des quantités de mouvement seront :

$$2Ap, \quad 2Aq, \quad 2Ar.$$

Pour plus de clarté nous appellerons *axe du corps* la perpendiculaire au plan de l'herpolhodie (H') et nous supposerons que la perpendiculaire au plan de (H) coïncide avec la verticale.

Ces définitions étant admises, les équations (1) nous montrent immédiatement que la composante de la rotation, relative à l'axe du corps, qui s'obtient en multipliant $2p$, $2q$, $2r$ respectivement par les cosinus directeurs $\frac{-p}{a'}$, $\frac{-q}{b'}$, $\frac{-r}{c'}$ et faisant la somme des produits obtenus, est constante et égale à $-2h'$; elles nous montrent aussi

que la projection de l'axe du couple des quantités de mouvement sur la verticale, dont les cosinus directeurs sont $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{b}$, $\frac{r}{c}$, est aussi constante et égale à $2\,A\,h$. Ces deux propriétés appartiendraient évidemment au mouvement, si le corps mobile avait son centre de gravité sur l'axe et était soumis à la seule action de son poids. Mais elles ne suffisent pas à définir complètement les forces qui agissent sur le corps.

Considérons la force vive du corps :

$$4\,A\,(p^2 + q^2 + r^2).$$

Si l'on introduit l'angle θ que fait la verticale avec l'axe du corps, cet angle sera défini par la relation :

$$u = \cos\theta = -\frac{p^2}{aa'} - \frac{q^2}{bb'} - \frac{r^2}{cc'},$$

et il est évident que, si l'on tient compte des deux premières équations (1), la force vive totale peut s'exprimer par une fonction linéaire de $\cos\theta$; on peut déterminer deux constantes D et H', telles que l'on ait :

$$4\,(p^2 + q^2 + r^2) = 2Du + 2H'.$$

Or on trouvera évidemment une équation de cette forme, si l'on ajoute aux suppositions déjà faites la suivante : que le corps ait son centre de gravité sur l'axe à une distance d, donnée en grandeur et en signe par la formule :

$$AD = Pd,$$

P étant le poids du corps et la verticale étant supposée dirigée vers le bas.

La détermination des forces est maintenant complète; et puisque nous avons obtenu les trois intégrales premières qui définissent le mouvement d'un corps pesant, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Le mouvement de (B) *par rapport à* (A) *est un de ceux que prendrait naturellement un corps pesant qui admettrait une sphère pour ellipsoïde d'inertie d'un de ses points et qui serait fixé par ce point.*

II

Les formules précédentes contiennent quatre constantes indépendantes a, b, c, h. Le corps, au point de vue mécanique, est défini par une seule constante D. Si donc on fait varier a, b, c, h de telle manière que D, qui est évidemment une fonction de ces quantités, conserve une même valeur, on aura une série de mouvements d'un même corps, qui dépendront de trois constantes arbitraires. Il semble donc qu'au moyen de la représentation précédente, on pourra obtenir tous les mouvements que peut prendre le corps soumis à la seule action de son poids, quand les circonstances initiales varient.

Pour établir ce résultat en toute rigueur, donnons-nous *à priori* la composante 2B de la rotation relative à l'axe du corps, la projection 2AL de l'axe du couple des quantités de mouvement sur la verticale, enfin les deux constantes D et H', qui figurent dans l'équation des forces vives écrite sous la forme :

$$\Sigma m v^2 = 2\mathrm{A}\,(\mathrm{D}u + \mathrm{H}').$$

Ces constantes définissant complètement le mouvement du corps, il suffira de montrer que l'on peut exprimer a, b, c, h en fonction de B, L, D, H'.

Les propositions établies nous donnent déjà :

$$h = \mathrm{L}, \qquad h' = -\mathrm{B}. \tag{2}$$

Il faut en outre exprimer que l'on a :

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{\mathrm{D}}{2}u + \frac{\mathrm{H}'}{2} = -\frac{\mathrm{D}}{2}\left\{\frac{p^2}{aa'} + \frac{q^2}{bb'} + \frac{r^2}{cc'}\right\} + \frac{\mathrm{H}'}{2},$$

et, pour cela, il faut écrire que cette équation est une combinaison linéaire des deux premières équations (1). On obtient ainsi le système :

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} 1 + \frac{\mathrm{D}}{2aa'} &= \frac{\mathrm{H}'}{2a^2} + \frac{\lambda}{2}\,\frac{h-a}{a^2},\\ 1 + \frac{\mathrm{D}}{2bb'} &= \frac{\mathrm{H}'}{2b^2} + \frac{\lambda}{2}\,\frac{h-b}{b^2},\\ 1 + \frac{\mathrm{D}}{2cc'} &= \frac{\mathrm{H}'}{2c^2} + \frac{\lambda}{2}\,\frac{h-c}{c^2}.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans la première de ces équations a' par sa valeur, donnée dans la Note précédente (p. 515), on obtient la formule :

$$2 + \frac{D}{\Omega}\left(\frac{Q}{a^2} - \frac{2R}{a^3}\right) = \frac{H'}{a^2} + \frac{\lambda\,(h - a)}{a^2},$$

et les autres équations (3) nous conduiraient à la même relation, dans laquelle a serait remplacée par b et par c. Il suffira donc d'exprimer que l'équation en x :

$$2 + \frac{D}{\Omega}\left(\frac{Q}{x^2} - \frac{2R}{x^3}\right) = \frac{H'}{x^2} + \frac{\lambda\,(h - x)}{x^2},$$

admet les racines a, b, c. On est ainsi conduit au système :

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Omega = D, \qquad \lambda = -2P, \\ H' = 2Ph - Q, \end{array}\right.$$

et tout se réduit à montrer que les équations (2) et (4) déterminent des valeurs réelles pour a, b, c, h.

En remplaçant dans la seconde équation (2), h' par sa valeur tirée de la Note précédente (p. 515), on aura :

$$(5)\qquad \frac{Qh - 2R}{\Omega} = -B.$$

Si l'on remplace d'autre part Ω par son expression, également donnée dans cette Note (p. 514), on obtiendra les trois équations :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} Q^2 - 4R\,(P - L) = D^2, \\ 2PL - Q = H', \\ QL - 2R = -BD, \end{array}\right.$$

qui déterminent P, Q, R. Si l'on tire des deux dernières, par exemple, les valeurs de P et de R en fonction de Q et qu'on les porte dans la première, il reste une équation du premier degré qui donne la valeur de Q, d'où l'on déduit ensuite celles de P et de R. On trouve ainsi :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} Q = \dfrac{LD^2 - BD\,(2L^2 - H')}{2L^2 - BD - LH'}, \\[2ex] 2P = \dfrac{D^2 - 2BDL + 2L^2H' - H'^2}{2L^2 - BD - LH'}, \\[2ex] 2R = \dfrac{D^2\,(L^2 - B^2)}{2L^2 - BD - LH'}, \end{array}\right.$$

et il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation :

$$x^3 - Px^2 + Qx - R = 0;$$

a, b, c seront les racines de cette équation.

Il est préférable, pour déterminer a, b, c et pour reconnaître la réalité des racines de l'équation précédente, de raisonner de la manière suivante :

L'équation à laquelle satisfait la variable u, qui est le cosinus de l'angle de la verticale avec l'axe du corps, a été déjà donnée dans le texte (p. 253). Si nous faisons les changements nécessités par nos nouvelles notations [1], cette équation devient ici :

$$(8)\quad \frac{du^2}{dt^2} = 2(1-u^2)(Du + H' - 2B^2) - 4(Bu - L)^2$$
$$= 2(1-u^2)(Du + H') - 4B^2 - 4L^2 + 8BLu.$$

On peut évidemment la former d'une autre manière, en partant de l'expression donnée plus haut pour u. Si l'on différentie en effet cette expression et si l'on remplace a', ..., $\frac{dp}{dt}$, ... par leurs valeurs, on trouvera :

$$(9)\qquad \Omega\frac{du}{dt} = 4\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}pqr.$$

D'autre part on peut exprimer p^2, q^2, r^2 en fonction de u, en faisant usage de l'intégrale des aires, de l'intégrale des forces vives et de l'expression donnée pour u en fonction de p, q, r. On trouve ainsi :

$$\frac{p^2}{a^2} = \frac{2ah - \alpha + \Omega u}{2(a-b)(a-c)},\quad \frac{q^2}{b^2} = \frac{2bh - \beta + \Omega u}{2(b-a)(b-c)},\quad \frac{r^2}{c^2} = \frac{2ch - \gamma + \Omega u}{2(c-a)(c-b)},$$

et si l'on porte ces valeurs dans l'équation précédente, il viendra :

$$(10)\quad \frac{\Omega^2}{2}\frac{du^2}{dt^2} = (\alpha - 2ah - \Omega u)(\beta - 2bh - \Omega u)(\gamma - 2ch - \Omega u).$$

---

[1] Il faut remplacer n par $2B$, faire $C = A$ et poser :

$$\frac{2\mu g h}{A} = 2D,\quad \frac{\alpha}{A} = 2H' - 4B^2,\quad \frac{\beta}{A} = -2L.$$

Cette équation devra donner pour $\frac{du}{dt}$ la même valeur que l'équation (8). C'est ce qu'il serait aisé de vérifier en se servant des formules (4) et (6). Mais au lieu de faire cette vérification qui n'offre aucune difficulté, nous conclurons que les racines de l'équation complètement connue :

$$(11) \qquad 2(1-u^2)(Du+H') - 4B^2 - 4L^2 + 8BLu = 0,$$

sont exprimées en fonction des axes par les formules :

$$\frac{\alpha - 2ah}{D}, \quad \frac{\beta - 2bh}{D}, \quad \frac{\gamma - 2ch}{D}.$$

Or on a, par suite de la définition de α (p. 515) :

$$\alpha - 2ah = 2h^2 - 2Ph + Q - 2\frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{h-a},$$

et les formules (2) et (6) nous donnent :

$$h = L, \quad 2h^2 - 2Ph + Q = 2L^2 - H',$$
$$2(h-a)(h-b)(h-c) = 2(L^3 - PL^2 + QL - P)$$
$$= 2L^3 - LH' - BD.$$

Par conséquent, u_0 désignant celle des racines de l'équation (11), qui est égale à $\frac{\alpha - 2ah}{D}$, on a :

$$Du_0 = 2L^2 - H' - \frac{2L^3 - BD - LH'}{L-a}.$$

Les autres racines u_1, u_2 s'exprimeraient de même en fonction de b et de c. Ce résultat peut être énoncé comme il suit :

Pour obtenir l'équation qui donne les carrés des axes principaux a, b, c, on effectuera dans l'équation (11) *la substitution linéaire :*

$$(12) \qquad Du = 2L^2 - H' - \frac{2L^3 - BD - LH'}{L-a}.$$

L'équation en a fera connaître les carrés des trois axes principaux.

Comme l'équation (11) a ses racines réelles, par la nature même du problème, il en sera de même de l'équation aux axes principaux.

La question que nous nous étions proposée, est ainsi complètement

résolue. Les quantités a', b', c' seront connues, puisque nous avons leurs expressions en a, b, c. Au reste nous pouvons obtenir aisément leur détermination directe. En effet les équations qui servent de base à tous nos calculs ne changent pas, si l'on remplace

$$a, \quad b, \quad c, \quad B, \quad L, \quad a', \quad b', \quad c',$$

par

$$a', \quad b', \quad c', \quad -L, \quad -B, \quad a, \quad b, \quad c.$$

Par suite on voit que l'on aura, pour obtenir a', b', c', à effectuer dans l'équation (11), la substitution :

$$(12)^{(a)} \qquad Du = 2B^2 - H' - \frac{2B^3 - LD - BH'}{B + a'}.$$

En terminant cet article nous signalerons une conséquence évidente des résultats précédents. Quand on a observé le mouvement du corps par rapport aux axes fixes, le mouvement inverse des axes fixes par rapport au corps représente aussi un de ceux que le même corps pourrait prendre si les conditions initiales étaient convenablement choisies.

Cela résulte évidemment de ce que, pour tous les mouvements d'un même corps, les constantes a, b, c, h ou a', b', c', h' sont assujetties uniquement à vérifier la relation :

$$\begin{aligned} \Omega^2 = D^2 &= (ab + ac + bc)^2 - 4\,abc\,(a + b + c - h) \\ &= (a'b' + a'c' + b'c')^2 - 4\,a'b'c'\,(a' + b' + c' - h'). \end{aligned}$$

III

Les propositions précédentes donnent donc la représentation géométrique, complète et aussi simple que possible, du mouvement d'un corps pesant, dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie du point par lequel il est fixé est une sphère. Les recherches de Lagrange et de Poisson ont fait connaître la solution du problème dans le cas, beaucoup plus étendu, où l'ellipsoïde d'inertie de ce point fixe est de révolution autour de la droite qui joint ce point au centre de gravité. Mais nous allons voir qu'on peut ramener très aisément la solution du problème dans cette hypothèse à celle du cas particulier que nous venons d'étudier.

Prenons en effet dans le corps (B) un système d'axes fixes rectangulaires tel que l'axe des z soit l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie du point fixe O. Soient A la valeur commune du moment d'inertie par rapport aux axes des x et des y, C le moment d'inertie par rapport à l'axe des z, et enfin p, q, r les composantes de la rotation du corps par rapport aux trois axes considérés. Les trois intégrales de Lagrange sont les suivantes :

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= n,\\ Ap.a' + Bq.b' + Cnu &= 2AL,\\ p^2 + q^2 &= 2Du + 2H; \end{aligned}\right.$$

n, L, H désignant les constantes arbitraires et a', b', u les cosinus des angles de Oz avec la verticale.

Considérons un corps auxiliaire (B′) qui serait animé par rapport au corps (B) d'une rotation constante

$$n_1 - n,$$

autour de Oz. Pour ce corps les composantes de la rotation totale seraient à chaque instant :

$$p, \quad q, \quad r_1 = n_1.$$

Si l'on détermine n_1 par la condition :

$$(14)\qquad An_1 = Cn,$$

les équations (13) pourront s'écrire :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} r_1 &= n_1\\ Ap\,a' + Bq\,b' + An_1\,u &= 2AL,\\ p^2 + q^2 &= 2Du + 2H. \end{aligned}\right.$$

Ce sont encore les intégrales du mouvement de Lagrange, mais relatives au cas où l'ellipsoïde du point fixe est une sphère. Si nous remarquons que l'on a :

$$n_1 - n = \frac{C - A}{A}\,n,$$

nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Étant donné un corps pesant de révolution (B), *fixé par un point de son*

axe et abandonné dans des conditions initiales quelconques à l'action de la pesanteur, désignons par n la projection constante de la rotation sur l'axe; un corps auxiliaire (B'), *animé par rapport au premier d'une vitesse de rotation constante*

$$\frac{C - A}{A} n,$$

autour de l'axe de révolution, prendra le même mouvement qu'un corps pesant pour lequel l'ellipsoïde du point fixe serait une sphère, le centre de gravité se trouvant sur l'axe. Par conséquent le mouvement du corps (B'), *lié d'une manière si simple à celui de* (B), *pourra se représenter par le roulement d'un cône ayant pour base une herpolhodie* (H') *sur un cône ayant pour base une autre herpolhodie* (H).

Nous pouvons déduire des remarques précédentes une proposition énoncée et démontrée par Jacobi dans un Mémoire posthume dont les fragments ont été publiés par M. Weierstrass. (Voir le t. II de la nouvelle édition des Œuvres de Jacobi.)

Pour cela il nous suffira d'appliquer les propositions de la Note précédente, qui nous ont permis de définir le mouvement de (B').

Si nous introduisons, en même temps que les deux cônes ayant pour base les herpolhodies (H), (H'), le cône (C) déjà défini, ayant pour base la polhodie (P), qui roule à la fois sur les deux cônes précédents, nous obtiendrons la proposition suivante :

Dans le cas où l'ellipsoïde central du point fixe est une sphère, il existe un système (C), mobile autour de O et jouissant de la double propriété suivante : Son mouvement absolu est celui d'un corps solide qui ne serait soumis à aucune force; ou, plus exactement, c'est un mouvement de Poinsot, pour lequel le plan invariable est horizontal; son mouvement par rapport au corps pesant est encore un mouvement de Poinsot, pour lequel le plan invariable est perpendiculaire à la droite qui contient le point fixe et le centre de gravité.

Dans le cas général, cette proposition subsiste dans ses points essentiels et devient le théorème de Jacobi, tel qu'il a été énoncé par M. Halphen dans une note récemment parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C.

En effet, la proposition précédente s'applique sans modification au

corps auxiliaire (B′) dont la rotation par rapport à (B) est :

$$\frac{C - A}{A} n.$$

Il suit de là que le mouvement du système (C) par rapport à (B) s'obtiendra en composant le mouvement de (C) par rapport à (B′), qui est un mouvement de Poinsot, avec une rotation constante :

$$\frac{C - A}{A} n,$$

autour de la perpendiculaire au plan invariable de ce mouvement. Or nous avons vu que la combinaison de ces deux mouvements donnera encore un mouvement de Poinsot. Nous obtenons ainsi dans toute sa généralité la belle proposition de Jacobi, dont l'énoncé le plus simple est le suivant :

Si l'on considère le mouvement le plus général d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe, il existe un système auxiliaire (C) *qui est animé, et par rapport aux axes fixes, et par rapport au corps mobile d'un mouvement de Poinsot. Les constantes relatives à ces deux mouvements sont différentes; les plans invariables sont, le plan horizontal pour le premier mouvement, et le plan perpendiculaire à l'axe pour le second.*

IV

Si nous conservons les notations de l'article I, nous voyons que la rotation absolue du corps (B′), à un instant donné, a pour composantes relatives aux axes principaux de (C) :

$$2p, \quad 2q, \quad 2r.$$

Pour obtenir la rotation de (B), il suffira de composer la rotation précédente avec celle qui a pour valeur :

$$-\frac{C - A}{A} n,$$

et dont la direction est perpendiculaire à l'axe de (B). Les composantes

de cette rotation seront, par conséquent :

$$\frac{C-A}{A}n\frac{p}{a'},\quad \frac{C-A}{A}n\frac{q}{b'},\quad \frac{C-A}{A}n\frac{r}{c'},$$

et l'on en déduira, pour les composantes de la rotation de (B), les expressions :

$$\left[2+\frac{(C-A)\,n}{A\,a'}\right]p,\quad \left[2+\frac{(C-A)\,n}{A\,b'}\right]q,\quad \left[2+\frac{(C-A)\,n}{A\,c'}\right]r.$$

Ces formules vont nous permettre de définir complètement, et d'une manière directe, le mouvement de (B).

D'abord l'extrémité de l'axe de rotation décrit dans le corps une herpolhodie. La proposition est évidente dans le cas du mouvement de (B'). Pour passer de là au mouvement de (B), il faut composer la rotation précédente avec une rotation constante dont l'axe est parallèle à l'axe de (B'), ce qui ne fait que transporter parallèlement à elle-même la courbe décrite par l'extrémité de l'axe de rotation; puis introduire une rotation constante du rayon vecteur, ce qui, nous l'avons vu, ne change pas la définition de l'herpolhodie. Ainsi, *la courbe décrite dans le corps par l'extrémité de l'axe de rotation est, dans tous les cas, une herpolhodie.*

D'autre part nous avons les composantes de la rotation totale et nous pouvons en déduire que la projection de cette rotation sur la verticale, aussi bien que le carré de la rotation, sont des fonctions linéaires de p^2, q^2, r^2 et sont par conséquent liées par une relation linéaire. En d'autres termes :

L'extrémité de la rotation décrit dans l'espace une courbe située sur une sphère ayant son centre sur la verticale.

Par suite :

Dans le cas général le mouvement peut se représenter par le roulement d'un cône, ayant pour base une herpolhodie, sur une sphère ayant son centre sur la verticale du point fixe, ce roulement s'effectuant avec une vitesse égale au rayon vecteur.

Nous allons retrouver ces résultats et définir la courbe sphérique en reprenant l'étude des équations données dans le texte.

V

Si l'on pose :

(16) $$\frac{Cn}{A} = 2B,$$

ces équations données à la page 253 du texte prennent la forme suivante :

(17) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} = \frac{2Bu - 2L}{1 - u^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = n + \frac{2Bu^2 - 2Lu}{1 - u^2}, \\ &\frac{du^2}{dt^2} = 2(1 - u^2)(Du + H) - 4(Bu - L)^2. \end{aligned} \right.$$

Elles mettent d'abord en évidence la proposition que nous avons démontrée à l'article III. Si l'on considère le corps auxiliaire (B'), pour lequel les angles d'Euler ont les valeurs :

$$\theta, \quad \psi \quad \text{et} \quad \varphi' = \varphi + (2B - n)\, t,$$

on aura :

(18) $$\frac{d\varphi'}{dt} = \frac{2B - 2Lu}{1 - u^2}.$$

C'est la valeur que l'on obtiendrait en faisant dans les formules (17) :

$$2B = n,$$

c'est à dire en supposant que n soit nul, ou que l'ellipsoïde central du point fixe soit une sphère.

Appelons maintenant p, q, r les composantes de la rotation relatives aux axes du corps, p', q', r' les composantes de la même rotation relatives aux axes fixes. Les formules établies dans le texte nous donnent :

(19) $$\left\{ \begin{aligned} &p^2 + q^2 = 2Du + 2H, \\ &r = n, \end{aligned} \right.$$

(20) $$\left\{ \begin{aligned} &p = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi . \frac{d\theta}{dt}, \\ &q = \cos\varphi \sin\theta . \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned} \right.$$

et par conséquent :

$$(21) \qquad -\operatorname{arc\,tg}\frac{q}{p} = \varphi + \operatorname{arc\,tg}.\frac{\sin\theta\,d\psi}{d\theta}.$$

La seconde des équations (19) exprime que la courbe décrite dans le corps par l'extrémité de la rotation est située dans un plan perpendiculaire à l'axe. La première équation (19) et l'équation (21) nous donnent le rayon vecteur ρ et l'angle polaire ω de cette courbe plane, en la supposant rapportée à des coordonnées polaires dont le pôle se trouve sur l'axe du corps. On a donc :

$$(22) \qquad \rho^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H}, \qquad \omega = -\varphi - \operatorname{arc\,tg}.\frac{\sin\theta\,d\psi}{d\theta},$$

et, en différentiant cette dernière équation après avoir remplacé $d\psi$ et $d\theta$ par leurs valeurs :

$$(\mathrm{D}u + \mathrm{H})\frac{d\omega}{dt} = (\mathrm{B} - n)(\mathrm{D}u + \mathrm{H}) + \mathrm{BH} + \mathrm{DL},$$

ou encore :

$$(23) \qquad \rho^2\frac{d\omega}{dt} = (\mathrm{B} - n)\rho^2 + 2(\mathrm{BH} + \mathrm{DL}).$$

Ces formules permettent de calculer la vitesse totale du pôle, qui est donnée par l'équation :

$$(24) \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = \mathrm{D}^2(1 - u^2) + 2n(n - 2\mathrm{B})(\mathrm{D}u + \mathrm{H}) - 4(n - 2\mathrm{B})(\mathrm{BH} + \mathrm{DL}).$$

On reconnaît ainsi que les formules (22), (23), (24) conviennent à une herpolhodie; la vitesse aréolaire étant une fonction linéaire, et la vitesse totale une fonction du second degré, de ρ^2.

Proposons-nous maintenant de définir la courbe décrite par l'extrémité de l'axe instantané dans l'espace. Les coordonnées de ce point sont p', q', r', et l'on obtiendra par un calcul facile les expressions :

$$(25) \qquad \left\{\begin{aligned} p' &= \sin\psi\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} - \cos\psi\frac{d\theta}{dt},\\ q' &= \cos\psi\sin\theta.\frac{d\varphi}{dt} + \sin\psi\frac{d\theta}{dt},\\ r' &= -\frac{d\psi}{dt} + \cos\theta.\frac{d\varphi}{dt},\end{aligned}\right.$$

de ces composantes en fonction des angles d'Euler. On a d'abord :

$$(26)\quad \begin{cases} p'^2 + q'^2 + r'^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2, \\ r' = 2\mathrm{L} - (2\mathrm{B} - n)\, u. \end{cases}$$

Si l'on élimine u, on trouvera l'équation d'une sphère ayant son centre sur la verticale, ce qui est conforme aux résultats déjà obtenus.

Pour définir complètement la courbe décrite par le pôle instantané, nous considérerons sa projection sur le plan horizontal que nous rapporterons à des coordonnées polaires, avec le point fixe pour pôle. ρ' et ω' désignant ces coordonnées polaires, on aura évidemment :

$$(27)\quad \begin{cases} \rho'^2 = p'^2 + q'^2, \\ \omega' = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{q'}{p'}. \end{cases}$$

Désignons par Δ et P les deux polynômes suivants :

$$(28)\quad \begin{cases} \Delta = 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{H} + n^2 - [(2\mathrm{B} - n)\, u - 2\mathrm{L}]^2; \\ \mathrm{P} = (2\mathrm{B} - n)\, u^2 - 2\mathrm{L}\, u + n. \end{cases}$$

On aura :

$$(29)\quad \rho'^2 = \Delta,$$

et les deux premières formules (25) nous donneront :

$$(30)\quad \omega' = -\psi - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\theta\, d\varphi}{d\theta} = -\psi + \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathrm{P}}{\dfrac{du}{dt}}.$$

Si l'on différentie cette formule en se servant de l'identité :

$$(31)\quad \frac{du^2}{dt^2} + \mathrm{P}^2 = (1 - u^2)\, \Delta,$$

on trouvera :

$$(32)\quad \frac{d\omega'}{dt} = \mathrm{L} + \frac{\mathrm{P}'\Delta - \mathrm{P}\Delta'}{2\Delta},$$

P' et Δ' désignant les dérivées de P et de Δ par rapport à u.

La vitesse aréolaire $\rho'^2 \dfrac{d\omega'}{dt}$ est ici une fonction du second degré de u.

La courbe plane, projection de la route décrite sur la sphère par le pôle instantané, est donc, en général, une courbe transcendante de nature plus complexe qu'une herpolhodie.

Si l'on cherche l'arc de la courbe sphérique, on trouvera, comme il fallait s'y attendre, la valeur déjà donnée par la formule (24).

La courbe sphérique décrite par le pôle dans l'espace est ainsi complètement définie.

Si l'on fait :

$$n = 2B,$$

cette courbe se réduit à une herpolhodie, conformément aux résultats déjà établis; et la vitesse du pôle instantané est alors donnée par la formule très simple

$$\frac{ds^2}{dt^2} = D^2(1 - u^2), \tag{33}$$

qu'on pourrait déduire immédiatement des théorèmes généraux de la mécanique [1].

Nous terminerons ce sujet en donnant une construction directe et purement géométrique de la route décrite par le pôle instantané dans l'espace.

Considérons tous les mouvements pour lesquels les constantes B, D, H, L ont la même valeur. Si les corps correspondants ont au début le même axe de rotation, il résulte des formules (17) que cet axe leur demeurera commun dans tout le mouvement; et le mouvement de chacun d'eux par rapport à l'un quelconque des autres se réduira à une rotation constante autour de l'axe. Étudions les courbes décrites

---

[1] En effet les trois équations des moments des quantités de mouvement peuvent être énoncées géométriquement de la manière suivante :

Si l'on construit à un instant quelconque le couple des quantités de mouvement transportées en un point, la vitesse de l'extrémité de l'axe de ce couple est égale à chaque instant en grandeur, direction et sens, à l'axe du couple résultant de tous les couples qui naissent de la translation des forces au même point.

En appliquant ici ce théorème au point fixe et remarquant que l'axe du couple résultant de la translation du poids a pour grandeur :

$$AD \sin \theta,$$

on a :

$$A\frac{ds}{dt} = AD \sin \theta.$$

Ce qui est l'équation même du texte.

dans l'espace par les pôles instantanés des rotations relatives à ces différents mouvements. Il faudra, pour cela, faire varier n dans les formules (25).

Soient p'_1, q'_1, r'_1 les valeurs de p', q', r' relatives à l'hypothèse

$$n = 2B.$$

Dans ce cas la courbe décrite par le pôle est, nous le savons, une herpolhodie (H) qui, d'après les formules (26), sera située dans le plan

$$Z = 2L.$$

Comme elle demeure en contact avec une autre herpolhodie dont le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution, *sa tangente sera nécessairement perpendiculaire à cet axe.*

Prenons maintenant une valeur quelconque de n. Les formules (25) nous donnent :

$$(34)\qquad \begin{cases} p' = p'_1 + (n - 2B)\sin\psi\sin\theta, \\ q' = q'_1 + (n - 2B)\cos\psi\sin\theta, \\ r' = r'_1 + (n - 2B)\cos\theta. \end{cases}$$

Nous savons que, pour chaque valeur de n, cette courbe se trouve sur la sphère définie par les formules (26) et dont l'équation est, en remplaçant p', q', r' par X, Y, Z,

$$(35)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 2H + n^2 + \frac{2D(2L - Z)}{2B - n}.$$

D'autre part les relations (34) nous montrent, ce qui est évident par la géométrie, qu'à un instant quelconque, tous les pôles correspondants à des valeurs différentes de n se trouvent placés, à des distances invariables les uns des autres, sur une même droite qui est parallèle à l'axe commun de révolution et, par conséquent, normale à l'herpolhodie (H). Or le mouvement de cette droite est défini par la condition que deux de ses points décrivent les sphères correspondantes, qu'un autre point demeure dans le plan de l'herpolhodie (H); et enfin qu'elle soit normale à la trajectoire de l'un quelconque de ses points, par exemple de celui qui décrit un plan. On s'assure aisément qu'il n'y a entre les deux sphères, le plan et les segments de la droite

d'autre relation que la suivante : Le plan est perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères. De là cette curieuse proposition qui se ramène d'ailleurs aisément à celles qui ont été démontrées à la fin de la Note précédente :

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis, les deux premiers à demeurer sur deux sphères différentes, le troisième à rester dans un plan perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères; si de plus la droite se déplace de manière à demeurer tangente à la trajectoire d'un de ses points, ce qui définit complètement son mouvement à partir d'une position donnée, le point de la droite assujetti à rester dans un plan décrira une herpolhodie; tous les autres décriront des courbes sphériques, qui seront les routes du pôle dans l'espace, pour le mouvement d'un corps pesant de révolution.

Telle est la définition directe et géométrique, que nous voulions obtenir, de la route décrite par le pôle dans le problème qui nous occupe, aussi bien que de l'herpolbodie de Poinsot. Nous signalerons en terminant le théorème suivant de cinématique qui se rattache directement à la proposition précédente et dont la démonstration n'offre aucune difficulté :

Si trois points d'une droite invariable sont assujettis à demeurer sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les autres points de la droite décrivent des sphères; et, en écartant un cas exceptionnel où la droite fait un angle constant avec la ligne des centres, il y a toujours un point de la droite qui décrit un plan.

Remarquons que cette proposition donne le moyen de décrire un plan à l'aide d'un système articulé comprenant quatre tiges seulement.

NOTE XX

SUR UN PROBLÈME ANALOGUE AU PRÉCÉDENT.

Les intégrales du problème précédent ont été données pour la première fois par Lagrange, dans la première édition de la *Mécanique Analytique* qui a paru en 1788. Il est intéressant de remarquer que la méthode de Lagrange s'applique, avec de très légères modifications, dans le cas beaucoup plus étendu où le solide de révolution, que l'on suppose toujours fixé par un point de son axe, est soumis à l'action d'une ou de plusieurs forces extérieures dont le potentiel dépend uniquement de l'angle que fait l'axe du corps avec une droite fixe. C'est ce qui aurait lieu, en particulier, si le corps était soumis à l'action d'un autre solide de révolution dont l'axe viendrait passer par le point fixe.

Pour le montrer, rapportons le corps à un système d'axes Ox, Oy, Oz mobiles avec lui et dirigés de telle manière que l'axe des z coïncide avec l'axe du corps. Étudions le mouvement de ces axes mobiles par rapport à un système d'axes fixes OX, OY, OZ; OZ étant la droite fixe dont il a été question plus haut. Le potentiel des actions extérieures sera donc une fonction $f(u)$ de u, u désignant le cosinus de l'angle θ que fait Oz avec OZ. Ce potentiel dépendant exclusivement de u, la résultante des actions extérieures sur le corps rencontrera nécessairement OZ et Oz. Par conséquent les deux premières intégrales de Lagrange subsisteront sans modification et l'on aura encore, en employant les trois angles d'Euler, et conservant les notations de la Note précédente :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2Bu - 2L}{1 - u^2}, \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt} = n + u.\dfrac{2Bu - L}{1 - u^2} = n - 2B + \dfrac{2B - 2Lu}{1 - u^2}. \end{cases}$$

Quant à l'équation des forces vives, elle prendra la forme :

$$(2) \qquad A(p^2 + q^2) = 2f(u) + 2H.$$

Et si l'on remplace p et q par leurs expressions en fonction des angles d'Euler, on aura :

$$(3) \qquad \frac{du^2}{dt^2} = 2\left[\frac{f(u) + H}{A}\right](1 - u^2) - 4(Bu - L)^2.$$

La solution du problème sera ainsi ramenée aux quadratures.

Comme application on pourra étudier le mouvement d'une sphere homogène fixée par un point quelconque de sa masse et soumise à l'action d'un point qui l'attire suivant la loi de Newton.

Des propositions générales que nous avons fait connaître, une seule s'applique encore au cas actuel. Si l'on considère le corps dont la position à l'instant t est déterminée par les valeurs

$$\theta, \quad \psi, \quad \varphi_1 = \varphi + (n - 2B)\,t,$$

des angles d'Euler, le mouvement de ce corps sera le même que si dans les formules primitives on supposait :

$$2B = n,$$

ce qui revient à admettre que l'ellipsoïde central du point fixe est une sphère.

Le mouvement relatif à cette hypothèse jouira encore de la propriété de réciprocité que nous avons signalée : Lorsqu'on a déterminé le mouvement des axes mobiles par rapport aux axes fixes, le mouvement inverse des axes fixes par rapport aux axes mobiles sera un de ceux que le même corps pourrait prendre, si les circonstances initiales étaient changées.

NOTE XXI

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES PERCUSSIONS ET LE CHOC DES CORPS.

En 1874, j'ai présenté à l'Académie des Sciences les principaux résultats d'une étude sur le choc des corps (voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1421, 1559, 1645, 1767, et le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IV). Je me propose de faire connaître ici les principaux résultats que j'ai obtenus.

I. — Des percussions.

Considérons un point matériel de masse m, soumis à l'action de différentes forces. Soient x, y, z les coordonnées de ce point à l'instant t, v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse au même instant, X_i, Y_i, Z_i celles de l'une quelconque des forces qui agissent sur le point. On aura les équations :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= X_1 + \ldots + X_n, \\ m\frac{dv_y}{dt} &= Y_1 + \ldots + Y_n, \\ m\frac{dv_z}{dt} &= Z_1 + \ldots + Z_n, \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, si l'on désigne par v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} les composantes

de la vitesse du mobile à l'instant 0, on aura :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \int_0^t X_1 dt + \ldots + \int_0^t X_n dt, \\ mv_y - mv_{0y} &= \int_0^t Y_1 dt + \ldots + \int_0^t Y_n dt, \\ mv_z - mv_{0z} &= \int_0^t Z_1 dt + \ldots + \int_0^t Z_n dt. \end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent s'interpréter de la manière suivante.

Appelons, avec différents auteurs, *impulsion* de la force (X, Y, Z) la quantité géométrique dont les composantes sont :

$$\int_0^t X dt, \quad \int_0^t Y dt, \quad \int_0^t Z dt;$$

les équations (2) donneront lieu au théorème suivant :

L'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point matériel dans un intervalle de temps fini quelconque est égal à la somme géométrique des impulsions des forces qui agissent sur ce point pendant l'intervalle de temps considéré.

Il résulte de ce théorème que si des forces agissent sur un point matériel, et si l'on connaît *seulement* leurs impulsions dans un intervalle de temps donné, on pourra déterminer l'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point sur lequel elles agissent, et par conséquent, si l'on connaît la masse et la vitesse initiale du point, on obtiendra en grandeur et en direction la vitesse finale. Mais il importe de remarquer que *l'on n'aura aucune notion sur la position de ce mobile à l'instant final.*

Imaginons maintenant que l'intervalle de temps pendant lequel les forces agissent devienne de plus en plus petit, mais que les impulsions de quelques-unes des forces conservent une valeur finie, ce qui exige que ces forces deviennent de plus en plus grandes : le changement de vitesse se produira dans un intervalle de temps de plus en plus court, mais il sera toujours fini. D'ailleurs, si l'on suppose que les impulsions des forces relatives à tout intervalle de temps compris dans celui que nous considérons demeurent inférieures à des grandeurs fixes, les changements de vitesse du point matériel demeureront finis et le déplacement du point matériel deviendra de plus en plus petit quand l'intervalle de temps diminuera.

En effet, réduisons toutes les forces à une seule dont les composantes à l'instant θ soient X_θ, Y_θ, Z_θ, et considérons la projection du mouvement sur l'axe des x par exemple. On a :

$$x - x_0 - v_{0x} t = \int_0^t d\theta \int_0^\theta X_\theta \, d\theta.$$

Nous supposons que l'impulsion $\int_0^\theta X_\theta d\theta$ demeure, quel que soit θ, inférieure à un nombre fixe M. On aura donc, en valeur absolue :

$$x - x_0 - v_{0x} t < \int_0^t M \, d\theta$$

ou

$$x - x_0 - v_{0x} t < Mt,$$

et, par conséquent, $x - x_0$ diminuera quand l'intervalle de temps deviendra de plus en plus court [1].

---

[1] Nous introduisons, on le voit, une condition qui, d'habitude, n'est pas énoncée explicitement : c'est que l'impulsion de la force dans une partie quelconque de l'intervalle de temps considéré demeure inférieure à une grandeur fixe quand l'intervalle de temps diminue. Cette condition est toujours satisfaite dans les applications, car on n'y considère que des percussions dont la direction ne varie pas sensiblement dans toute la durée de l'intervalle pendant lequel elles agissent. Par exemple, dans le choc de deux corps, la force qui s'exerce au point de contact sur l'un des corps ne peut agir que dans un sens déterminé, de manière à écarter les deux corps. Alors l'intégrale $\int_0^\theta X_\theta \, d\theta$ conserve son signe et ne cesse de croître ; elle demeure donc inférieure à sa valeur finale, qui, par hypothèse, est finie.

Mais, si l'on se place à un point de vue exclusivement théorique, il est aisé de trouver des forces qui, dans un temps très court, imprimeront des changements finis ou même nuls de vitesse, tout en déplaçant le mobile d'une quantité finie. Considérons, par exemple, un point qui se meut en ligne droite et qui est soumis à l'action de la force dont l'expression à l'instant θ est :

$$X_\theta = \frac{4c\pi}{T^2} \sin\frac{\theta\pi}{T} \cos\frac{\theta\pi}{T},$$

c et T étant des constantes. On aura :

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{4c\pi}{T^2} \sin\frac{\theta\pi}{T} \cos\frac{\theta\pi}{T},$$

et par suite, si l'on appelle v_0 la vitesse initiale,

$$v_x - v_0 = \frac{2c}{T} \sin^2\frac{\theta\pi}{T},$$

$$x - x_0 - v_0\theta = \frac{c\theta}{T} - \frac{c}{2\pi} \sin\frac{2\theta\pi}{T}.$$

On se rapproche donc de plus en plus d'un état limite dans lequel le mobile, sans changer de position, éprouverait une modification brusque de sa vitesse. C'est cet état limite que l'on étudie dans la théorie des percussions, et il résulte immédiatement de ce qui précède que, pour déterminer le changement de vitesse du mobile, il suffit de connaître les impulsions des différentes forces auxquelles il est soumis. Ce sont ces impulsions auxquelles on donne le nom de *percussions*. Il est clair que les percussions provenant de forces finies, telles que la pesanteur, peuvent être considérées comme nulles.

Je ne m'arrêterai pas à discuter une objection que l'on adresse quelquefois à la théorie des percussions. Quelques auteurs, en s'appuyant sur ce qu'il n'existe pas de force rigoureusement instantanée, préfèrent ne pas employer la notion des percussions et les théories qui déterminent leurs effets. Il n'existe pas de point géométrique ni de ligne droite dans la nature, et cependant nous trouvons utilité et intérêt à étudier ces abstractions. Il y a sans doute, quand on passe aux applications, à examiner les erreurs que l'on peut commettre en appliquant les théorèmes de la Science pure, mais cette question ne nous paraît pas devoir être mêlée au développement de la Science elle-même.

On sait comment se mesurent et se représentent les percussions. Au fond, ce sont des quantités de mouvement, qu'il suffit de composer avec celles des points sur lesquels elles agissent. Je rappellerai rapidement

---

On a donc, pour $\theta = T$,

$$v = v_0,$$
$$x = x_0 + v_0 T + c.$$

Si l'on suppose que le temps T devienne de plus en plus petit, c demeurant constant, on aura une force très grande agissant pendant un temps très court, *ne produisant aucun changement de vitesse et déplaçant le point d'une quantité quelconque c.*

Mais il est facile de reconnaître que la condition énoncée dans le texte ne se trouve plus remplie, puisque l'impulsion partielle

$$\int_0^\theta X_\theta \, d\theta = \frac{2c}{T} \sin^2 \frac{\theta\pi}{T}$$

ne demeure pas finie, pour $\theta = \frac{T}{2}$ par exemple, quand T tend vers zéro. D'ailleurs, il est aisé de reconnaître que la force change de sens au milieu de son action.

C'est une force de ce genre qu'une locomotive doit déployer pour exécuter une de ces opérations qui sont si fréquentes dans les gares et amener rapidement un ou plusieurs wagons, sans vitesse, d'une position dans une autre.

les règles relatives à leur effet sur le corps solide et je présenterai en même temps quelques remarques nouvelles sur leur application.

Si le corps solide a un axe fixe, le produit du moment d'inertie relatif à cet axe par l'accroissement de la vitesse de rotation est égal à la somme des moments des percussions par rapport à cet axe.

Si le corps a un point fixe, désignons par p, q, r les composantes de la rotation suivant les trois axes principaux de ce point, et par A, B, C les moments d'inertie relatifs à ces trois axes; les vitesses prendront des accroissements Δp, Δq, Δr définis par les formules :

$$(3) \qquad \begin{cases} A\Delta p = L, \\ B\Delta q = M, \\ C\Delta r = N, \end{cases}$$

où L, M, N désignent les sommes des moments des percussions par rapport aux trois axes.

Les formules précédentes peuvent être remplacées par une construction géométrique très élégante dont Poinsot a souvent fait usage. Soit O le point fixe. Supposons qu'on y transporte les quantités de mouvement de tous les points du système et que l'on compose les couples qui naissent de ces translations : le couple résultant sera le *couple des quantités de mouvement* transportées en O. Il est lié, comme on sait, d'une manière très simple à la rotation. 1° L'axe de rotation est le diamètre conjugué du plan de ce couple par rapport à l'ellipsoïde central du point O, et il est du même côté de ce plan que l'axe du couple. 2° Si G désigne le moment du couple, l la longueur du demi-diamètre intercepté dans l'ellipsoïde par l'axe de rotation, et δ la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde à l'extrémité de l'axe de rotation, la vitesse angulaire de rotation a pour valeur :

$$\omega = G\, l\delta.$$

On voit donc que, si l'on connaît le couple des quantités de mouvement, on aura immédiatement le mouvement du corps solide.

Or, les formules précédentes peuvent se traduire comme il suit. Transportons toutes les percussions au point fixe et composons tous les couples qui naissent de cette translation : on obtiendra un couple résultant. *Il suffira de composer ce couple avec celui des quantités de*

mouvement antérieurement acquises pour avoir le nouveau couple des quantités de mouvement.

Dans le cas où le corps solide est entièrement libre, désignons par m la masse du corps, par V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse du centre de gravité, par X, Y, Z celles de la résultante générale des percussions transportées au centre de gravité. On aura :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\Delta V_x &= X, \\ m\Delta V_y &= Y, \\ m\Delta V_z &= Z, \end{aligned} \right.$$

et ces équations s'interprètent comme il suit : La nouvelle vitesse du centre de gravité sera la même que si la masse entière y était concentrée et toutes les percussions transportées parallèlement à elles-mêmes.

Quant au changement que subit la rotation autour du centre de gravité, on le déterminera en considérant ce centre comme un point fixe et en appliquant, soit les formules (3), soit la construction géométrique de Poinsot qui leur est équivalente.

La forme linéaire de toutes ces équations nous montre tout de suite : 1° que l'on obtiendra la nouvelle vitesse d'un point quelconque en composant la vitesse antérieure avec celle que détermineraient les percussions si elles agissaient sur le corps au repos; 2° que l'on obtiendra le même résultat, soit en faisant agir simultanément les percussions, soit en les faisant agir successivement dans un intervalle de temps suffisamment court; 3° enfin que, si l'on multiplie les percussions par un nombre quelconque p, les vitesses qu'elles déterminent sur le corps au repos sont toutes multipliées par p. Tous ces résultats s'étendent d'ailleurs, sans difficulté, au cas où le corps solide est soumis à des liaisons d'une nature quelconque, et les composantes de la vitesse que prend un point quelconque sont toujours des fonctions linéaires des composantes des percussions qui agissent sur le corps solide.

Nous remarquerons, en terminant, que les constructions géométriques données précédemment permettent de résoudre d'une manière simple certaines questions. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trouver les percussions qui, appliquées à un corps solide libre, lui impriment au début une rotation. On reconnaîtra aisément que les lignes d'action de ces percussions doivent être perpendiculaires à leur

polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité; elles forment donc un complexe bien connu et qui a été étudié par divers géomètres.

Considérons, en effet, une percussion P appliquée à un corps solide. Elle imprimera au centre de gravité une vitesse de translation qui lui sera parallèle. Quant à la rotation autour du centre de gravité, nous avons vu qu'elle commence autour de la droite qui est le diamètre conjugué du plan passant par la percussion P et le centre de gravité. Pour que le mouvement initial soit une rotation, il faut que la translation imprimée au centre de gravité soit normale à l'axe de rotation; c'est-à-dire que la ligne d'action de la percussion P soit une droite perpendiculaire au diamètre conjugué, par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité, du plan passant par cette droite et par le centre de gravité; ou, ce qui est la même chose, il faut que cette ligne d'action soit une droite perpendiculaire à sa polaire par rapport à l'ellipsoïde central du centre de gravité.

II. — Des forces vives dans la théorie des percussions.

Reprenons les équations relatives à l'effet des percussions sur un point matériel :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} m(v_x - v_{0x}) &= \sum \int_0^t X\,dt,\\ m(v_y - v_{0y}) &= \sum \int_0^t Y\,dt,\\ m(v_z - v_{0z}) &= \sum \int_0^t Z\,dt. \end{aligned}\right.$$

Multiplions-les par $v_x + v_{0x}$, $v_y + v_{0y}$, $v_z + v_{0z}$ et ajoutons-les. Nous aurons, en désignant par v_0, v les vitesses initiale et finale,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &m(v^2 - v_0^2)\\ &= \sum \int_0^t [X(v_x + v_{0x})\,dt + Y(v_y + v_{0y})\,dt + Z(v_z + v_{0z})\,dt]. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette formule a une signification géométrique très simple. Si la force (X, Y, Z) agissait, pendant toute la durée de

son action, sur un mobile animé de la vitesse constante dont les composantes sont :

$$v_x + v_{0x}, \quad v_y + v_{0y}, \quad v_z + v_{0z},$$

son travail élémentaire serait :

$$X (v_x + v_{0x})\, dt + Y (v_y + v_{0y})\, dt + Z (v_z + v_{0z})\, dt,$$

et son travail total dans l'intervalle de 0 à t serait précisément l'intégrale qui figure dans le second membre de la formule (6). Nous avons donc la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Quand des percussions agissent sur un point matériel, la variation de force vive est égale à la somme des travaux que produiraient les forces d'où proviennent ces percussions si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

Multiplions maintenant les équations (5) par v_x, v_y, v_z respectivement et ajoutons-les. Nous obtiendrons une équation que l'on mettra aisément sous la forme suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} m v_0^2 - m v^2 = m\, &[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ &- 2 \sum \int_0^t (X v_x + Y v_y + Z v_z)\, dt. \end{aligned} \right.$$

Cette équation, interprétée comme la précédente, conduit à cette nouvelle proposition :

THÉORÈME II. — *La perte de force vive est égale à la force vive due à la vitesse perdue moins le double de la somme des travaux que produiraient les forces si le point matériel conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante et égale à la vitesse finale.*

Enfin, si l'on employait comme multiplicateurs v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, on aurait de même l'équation :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} m v^2 - m v_0^2 = m\, &[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ &+ 2 \sum \int_0^t (X v_{0x} + Y v_{0y} + Z v_{0z})\, dt, \end{aligned} \right.$$

qui s'interprète comme il suit :

THÉORÈME III. — *Le gain de force vive est égal à la force vive due à la vitesse gagnée (ou perdue), augmentée du double des travaux que produiraient les forces si, pendant toute la durée de leur action, le point matériel conservait une vitesse constante et égale à la vitesse initiale.*

Il est aisé de reconnaître que cette dernière proposition est un simple corollaire des deux précédentes, mais il peut y avoir quelque intérêt à en faire usage.

Considérons maintenant un système composé d'un nombre quelconque de points matériels. Écrivons les équations analogues à l'équation (6) pour chacun des points et ajoutons toutes ces équations. Nous aurons :

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 \\ = \sum\sum \int_0^t [X dt\,(v_x + v_{0x}) + Y dt\,(v_y + v_{0y}) + Z dt\,(v_z + v_{0z})], \end{cases}$$

les sommes qui figurent dans le premier membre s'étendant à tous les points matériels, et celle qui figure dans le second à toutes les forces. Cette équation conduit au théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La variation de la force vive totale d'un système est égale à la somme des travaux que produiraient les percussions, tant intérieures qu'extérieures, si chacun des points d'application de ces percussions conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de ses vitesses initiale et finale.*

De même, l'équation (7) nous conduira à la suivante :

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = \Sigma m\,[(v_x - v_{0x})^2 + (v_y - v_{0y})^2 + (v_z - v_{0z})^2] \\ \qquad - 2 \sum\sum \int_0^t (X v_x + Y v_y + Z v_z)\, dt, \end{cases}$$

ce qui donne le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *La perte de force vive du système est égale à la force vive due aux vitesses perdues, diminuée du double de la somme des travaux que produiraient les percussions, tant intérieures qu'extérieures, si chacun de*

leurs points d'application conservait, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante, égale à sa vitesse finale.

Toutes les propositions précédentes s'appliquent aux forces agissant pendant un temps quelconque. Mais, si le système matériel est un corps solide et si les forces agissent pendant un temps très court, c'est à dire sont de véritables percussions, il est aisé de démontrer que les termes correspondants aux percussions intérieures se détruisent deux à deux et disparaissent des équations (9) et (10). Soient, en effet, m, m' deux points du corps solide entre lesquels s'exerce une force (X, Y, Z). Appelons v_{0x}, v_x, ... les vitesses du point m, et v'_{0x}, v'_x, ... celles du point m'. Les termes qui proviennent de la force (X, Y, Z) dans les équations (9) et (10) sont composés des deux expressions :

$$(11)\quad \begin{cases} (v_x - v'_x)\int X\,dt + (v_y - v'_y)\int Y\,dt + (v_z - v'_z)\int Z\,dt, \\ (v_{0x} - v'_{0x})\int X\,dt + (v_{0y} - v'_{0y})\int Y\,dt + (v_{0z} - v'_{0z})\int Z\,dt. \end{cases}$$

Les deux points m, m' étant maintenus, par hypothèse, à une distance invariable, les vitesses initiale et finale satisfont aux conditions :

$$(12)\quad \begin{cases} (x-x')(v_x - v'_x) + (y-y')(v_y - v'_y) + (z-z')(v_z - v'_z) = 0, \\ (x-x')(v_{0x} - v'_{0x}) + (y-y')(v_{0y} - v'_{0y}) + (z-z')(v_{0z} - v'_{0z}) = 0, \end{cases}$$

x, y, z, x', y', z' désignant les coordonnées des deux points. D'ailleurs, la percussion étant dirigée suivant la droite qui joint les deux points, on a :

$$\int X\,dt = \lambda\,(x - x'), \qquad \int Y\,dt = \lambda\,(y - y'), \qquad \int Z\,dt = \lambda\,(z - z'),$$

et, par conséquent, les deux expressions (11) sont nulles, en vertu des formules (12). Ainsi les percussions intérieures disparaissent dans les formules (9) et (10).

La démonstration précédente n'est pas absolument irréprochable, parce qu'elle suppose que les distances des différents points soient

demeurées les mêmes pendant toute la durée des percussions. Il est aisé de reconnaître *à priori* que cette condition n'est pas nécessaire et qu'il suffit, pour que les théorèmes aient lieu, que les distances mutuelles des différents points redeviennent les mêmes après les percussions. En effet, dans ce cas, les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments permettent de trouver le nouveau mouvement du corps solide, et par suite la variation de force vive. Or l'application de ces théorèmes est indépendante des déformations passagères qui peuvent se produire pendant l'action des percussions. On voit donc qu'il en sera de même de la variation de la force vive, et, par suite, les expressions que nous avons trouvées en supposant les distances invariables doivent subsister dans tous les cas, pourvu que les distances reprennent leurs valeurs initiales quand les percussions ont cessé leur action. Nous allons, du reste, en nous servant seulement des équations ordinaires, obtenir une vérification des propositions précédentes.

Pour cela reprenons les équations (3) et (4), que nous écrirons :

$$\begin{aligned}
m\,(V_x - V_{0x}) &= \Sigma X_i = X,\\
m\,(V_y - V_{0y}) &= \Sigma Y_i = Y,\\
m\,(V_z - V_{0z}) &= \Sigma Z_i = Z,\\
A\,(p - p_0) &= \Sigma\,(y_i Z_i - z_i Y_i) = L,\\
B\,(q - q_0) &= \Sigma\,(z_i X_i - x_i Z_i) = M,\\
C\,(r - r_0) &= \Sigma\,(x_i Y_i - y_i X_i) = N,
\end{aligned}$$

x_i, y_i, z_i désignant les coordonnées du point d'application de la percussion (X_i, Y_i, Z_i) par rapport aux trois axes principaux du centre de gravité.

En multipliant ces équations par $V_x + V_{0x}$, ..., $p + p_0$, ... respectivement et en les ajoutant, on a :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2\\
&\quad = X\,(V_x + V_{0x}) + Y\,(V_y + V_{0y}) + Z\,(V_z + V_{0z})\\
&\qquad + L\,(p + p_0) + M\,(q + q_0) + N\,(r + r_0).
\end{aligned}\right.$$

Le premier membre représente la variation de force vive. D'autre part, si l'on appelle v^0_{ix}, ..., v_{ix}, ... les composantes des vitesses initiale et finale du point d'application (x_i, y_i, z_i) de la percussion

(X_i, Y_i, Z_i), on a :

$$\begin{aligned} v^0_{ix} &= V_{0x} + q_0 z_i - r_0 y_i, & v_{ix} &= V_x + q z_i - r y_i, \\ v^0_{iy} &= V_{0y} + r_0 x_i - p_0 z_i, & v_{iy} &= V_y + r x_i - p z_i, \\ v^0_{iz} &= V_{0z} + p_0 y_i - q_0 x_i, & v_{iz} &= V_z + p y_i - q x_i, \end{aligned}$$

et l'on obtient, par un calcul facile :

$$\begin{aligned} \Sigma X_i (v_{ix} + v^0_{ix}) + Y_i (v_{iy} + v^0_{iy}) + Z_i (v_{iz} + v^0_{iz}) \\ = X (V_x + V_{0x}) + Y (V_y + V_{0y}) + Z (V_z + V_{0z}) \\ + (p + p_0) L + (q + q_0) M + (r + r_0) N. \end{aligned}$$

En comparant à l'équation (13), on a :

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & mV^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - mV_0^2 - Ap_0^2 - Bq_0^2 - Cr_0^2, \\ & \quad = \Sigma X_i (v_{ix} + v^0_{ix}) + Y_i (v_{iy} + v^0_{iy}) + Z_i (v_{iz} + v^0_{iz}), \end{aligned} \right.$$

et cette équation ne diffère de l'équation (9) qu'en ce que les termes provenant des actions intérieures ont disparu. Nous avons donc la proposition suivante :

Théorème VI. — *Quand des percussions agissent sur un corps solide, la variation de force vive est égale à la somme des travaux qu'elles produiraient si leurs points d'application conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à la somme géométrique de leur vitesse initiale et de leur vitesse finale.*

On vérifiera de la même manière l'équation suivante :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 + mV_0^2 - Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 - mV^2 \\ & \quad = A (p - p_0)^2 + B (q - q_0)^2 + C (r - r_0)^2 + m (V - V_0)^2 \\ & \qquad - 2\Sigma (X_i v_{ix} + Y_i v_{iy} + Z_i v_{iz}), \end{aligned} \right.$$

qui ne diffère de l'équation (10) qu'en ce que les termes provenant des percussions intérieures ont disparu et qui conduit au théorème suivant :

Théorème VII. — *La perte de force vive éprouvée par le corps solide est égale à la force vive due aux vitesses perdues moins le double de la somme des travaux que produiraient les percussions si les points sur lesquels elles agissent conservaient, pendant toute la durée de leur action, une vitesse constante égale à leur vitesse finale.*

Il est bon de remarquer que si le corps solide est soumis à des liaisons, s'il a, par exemple, des points fixes, ou des points assujettis à demeurer sur une surface fixe, ou des surfaces assujetties à passer par des points fixes, etc., les termes provenant dans les équations précédentes des percussions de liaison seront tous nuls, pourvu que l'on néglige le frottement. Par exemple, s'il y a un point fixe, la percussion que le corps reçoit de l'obstacle fixe, s'exerçant sur un point dont la vitesse est et demeure nulle, ne donnera de terme dans aucune des équations (14) ou (15).

D'apres cela, si une seule percussion agit sur un corps solide au repos, la force vive imprimée au corps sera, en vertu du théorème VI et de l'équation (14), égale au produit de cette percussion par la projection, sur sa direction, de la vitesse que prend son point d'application. Il faut donc que cette projection soit positive et, par conséquent, que le point d'application *cède* sous l'action de la percussion qui lui est appliquée. C'est là un résultat conforme à notre expérience de tous les jours; mais le théorème précédent, qui le met en évidence, nous conduit, en outre, à la considération d'un élément nouveau qui se rapporte aux droites d'un corps solide et que nous allons définir.

Concevons une droite D et supposons qu'une percussion égale à l'unité ait cette droite pour ligne d'action. Soit A le point de D où elle est appliquée. Elle communique à ce point A une vitesse dont la projection sur la percussion et par conséquent sur la droite est positive; nous désignerons cette projection par $\frac{1}{\mu}$, et il est clair qu'elle demeurerait la même si l'on faisait glisser la percussion sur la droite D; car on sait qu'alors le mouvement imprimé au corps demeure le même, et d'autre part, dans ce mouvement, les projections sur la droite des vitesses de tous les points de cette droite sont égales. Nous appellerons cette quantité μ, essentiellement positive, le *paramètre de la droite*. Quand on l'aura déterminée, on saura que *toute percussion égale à* P *et dirigée suivant la droite déterminera en son point d'application une vitesse dont la projection sur la percussion sera positive et égale à* $\frac{P}{\mu}$.

Cherchons quelle est la valeur du paramètre dans les cas principaux que l'on a à considérer.

1° Supposons d'abord le corps libre, et soit une percussion agissant suivant une droite XX′ (*fig.* 277). Désignons par M la masse du corps. La percussion P imprimera d'abord à tous les points une vitesse de translation égale à $\frac{P}{M}$; elle produira, en outre, une rotation autour du diamètre GL, conjugué au plan GXX′ dans l'ellipsoïde central du centre de gravité G. Appelons p la distance GH du centre de gravité à la droite XX′. Le moment G du couple qui résulte de la translation de la percussion en G sera Pp, et, par conséquent, la vitesse de rotation autour de GL sera donnée par la formule :

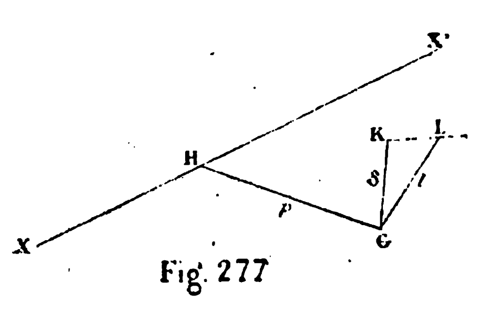


Fig. 277

$$\omega = Ppl\delta,$$

où l désigne la longueur du demi-diamètre GL de l'ellipsoïde central autour duquel s'effectue la rotation, et δ la distance GK du centre au plan tangent à l'extrémité de ce diamètre. Nous pouvons d'ailleurs décomposer cette rotation en deux autres, l'une ω' dirigée suivant GK et égale à $\omega \times \frac{\delta}{l}$ ou $Pp\delta^2$, l'autre ω'' dirigée dans le plan XX′ et dont nous n'avons pas besoin de connaître la valeur.

D'après cela, la vitesse d'un point quelconque de XX′, par exemple du pied H de la perpendiculaire abaissée de G, se compose de trois vitesses : 1° la vitesse de translation dont la projection sur la droite XX′, prise dans le sens de la percussion, est $\frac{P}{M}$; 2° la vitesse due à la rotation ω', vitesse qui est dirigée suivant XX′ et qui a pour valeur $\omega' p$ ou $Pp^2\delta^2$; 3° la vitesse due à la rotation ω'', qui, étant normale à XX′, donne une projection nulle. On voit donc que la projection sur la direction de la percussion de la vitesse imprimée au point H, projection qui conserve la même valeur pour un point quelconque de XX′, est :

$$P\left(\frac{1}{M} + p^2\delta^2\right).$$

On a donc dans ce cas, pour le paramètre de la droite XX', l'expression très simple :

$$(16)_a \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + p^2\delta^2.$$

Le paramètre, généralement inférieur à la masse, lui devient égal quand la droite passe au centre de gravité.

Si le corps a un point fixe, les raisonnements sont les mêmes; seulement il n'y a pas à tenir compte de la vitesse de translation, et l'on a :

$$(16)_b \qquad \frac{1}{\mu} = p^2\delta^2,$$

le centre de gravité étant remplacé par le point fixe.

Enfin, si le corps a un axe fixe, soient XX' (*fig. 278*) la ligne d'action de la percussion, θ l'angle qu'elle fait avec l'axe $\alpha\alpha'$, et d sa plus courte distance à l'axe. Désignons par ω la vitesse angulaire imprimée et par Mk^2 le moment d'inertie par rapport à $\alpha\alpha'$. On aura :

$$Mk^2\omega = Pd \sin\theta.$$

Fig. 278

La vitesse du pied B de la plus courte distance sera $\frac{Pd^2 \sin\theta}{Mk^2}$, et sa projection sur XX' sera :

$$\frac{Pd^2 \sin^2\theta}{Mk^2}.$$

On aura donc ici :

$$(16)_c \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{d^2 \sin^2\theta}{Mk^2}.$$

Nous nous bornerons à ces trois cas principaux. Pour les autres, nous nous contenterons de rappeler que le paramètre μ est essentiellement positif.

III. — Du choc des corps.

Le choc des corps a été l'objet de nombreuses recherches. Poisson,

dans le Tome II de sa *Mécanique*, commence par traiter le choc des corps mous et il obtient la solution complète du problème en ajoutant aux douze équations fournies par les principes du centre de gravité et des moments une équation nouvelle qui exprime qu'à la fin du choc les vitesses normales au point de contact des deux solides sont égales. Puis il passe de là au cas des corps élastiques, en remarquant que le choc peut alors se décomposer en deux parties séparées par l'instant de la plus grande compression. Dans la première, le phénomène est le même que si les deux corps étaient dépourvus d'élasticité. Dans la seconde les corps reviennent à leur forme primitive, et il admet qu'ils reçoivent une percussion égale à celle qui s'est développée à leur contact pendant la première partie du choc. Il est aisé d'établir que la force vive totale reprend sa valeur à la fin du choc, ce qui fournit une espèce de vérification de l'hypothèse de Poisson.

En 1838, dans le *Resumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées*, Navier a remarqué que, si l'on fait abstraction des vibrations communiquées par le choc aux molécules des deux corps, la force vive totale doit reprendre la même valeur. Cette remarque lui a permis d'obtenir la percussion totale qui se produit au contact des corps, et par conséquent de donner la solution complète de la question.

En 1874, M. Resal a adopté la marche proposée par Navier, dans une Note importante qui figure aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII).

Toutes ces différentes solutions sont analytiques; elles reposent sur la considération de treize équations du premier degré et ne laissent pas voir la signification géométrique très simple des résultats. Je me suis proposé, en 1874, de donner une solution purement géométrique de cette question, et je vais indiquer ici les résultats que j'ai obtenus.

Soient (M), (M′) deux corps solides se choquant en un point A. L'effet du choc peut se représenter par deux percussions égales et contraires, dirigées suivant la normale en A aux deux surfaces en contact, l'une $\int N\,dt$ appliquée au corps (M), l'autre $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M′). Soient w_0, w les composantes suivant la normale au point de choc de la vitesse initiale et de la vitesse finale du point de (M) qui se trouve en A, et soient w'_0, w' les mêmes quantités relatives au corps (M′).

Si nous appliquons successivement le théorème VI aux deux corps (M), (M'), nous aurons :

$$(17)\quad \begin{cases} \Sigma_{M}(mv^2 - mv_0^2) = \quad (w + w_0)\int N\,dt, \\ \Sigma_{M'}(mv^2 - mv_0^2) = -(w' + w_0')\int N\,dt, \end{cases}$$

Σ_M, $\Sigma_{M'}$ désignant les forces vives des corps (M), (M') respectivement. Il est à remarquer que ces équations, qui ont évidemment lieu pour des corps libres, sont encore vraies si les corps ont des points fixes ou sont assujettis à d'autres liaisons, car nous avons vu que les percussions de liaison ne peuvent introduire aucun terme dans les seconds membres des équations générales (14) et (15), et les formules (17) ne sont que l'application particulière de l'équation (14).

En ajoutant les deux équations précédentes, on aura, pour la variation totale de la force vive, la formule :

$$(18)\qquad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = (w - w' + w_0 - w_0')\int N\,dt,$$

qui va nous donner la solution complète de la question.

Supposons d'abord que les corps soient parfaitement élastiques et que la perte de force vive doive être nulle; il faudra que l'on ait :

$$(19)\qquad w - w' = -(w_0 - w_0').$$

Donc, l'effet du choc dans le cas des corps parfaitement élastiques est de *changer de signe la composante normale de la vitesse relative des deux points de choc sans changer la grandeur de cette composante.* Tel est le résultat très simple auquel conduit immédiatement notre théorie.

Cela posé, décomposons le choc en deux parties par la condition que les intégrales $\int N\,dt$ relatives à ces deux parties soient égales. Les percussions imprimées aux corps solides, dans les deux parties du choc ainsi divisé, ont par hypothèse même grandeur, et elles agissent suivant la même droite. Donc, d'après les règles connues de l'effet des percussions, les vitesses gagnées par les points de l'un quelconque des solides sont les mêmes en grandeur et en direction pour ces deux

parties du choc. Cette remarque permet de déterminer les composantes normales des vitesses des points des deux corps placés en A, à la fin de la première partie du choc; car soit u la composante normale de la vitesse du point de choc de (M), on devra avoir :

$$w_0 - u = u - w,$$

équation qui exprime que la composante normale de la vitesse varie de la même quantité dans les deux parties du choc. Donc :

$$u = \frac{w + w_0}{2}.$$

Si u' désigne la quantité analogue à u pour le corps (M'), on aura de même :

$$u' = \frac{w' + w'_0}{2}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (19), on aura :

$$u = u'.$$

Ainsi, quand l'intégrale $\int N dt$ a acquis la moitié de sa valeur définitive, les vitesses normales des deux points de choc sont égales. Si le choc cessait à cet instant, on serait dans le cas des *corps mous*. Donc, *si, dans le cas des corps parfaitement élastiques, on sépare le choc en deux parties par l'instant où les vitesses normales des deux points de choc sont égales, les percussions relatives à ces deux parties du choc sont égales*. En d'autres termes, la percussion dans le cas des corps élastiques est double de celle qui se produit quand les corps sont mous. C'est le point que l'on admettait dans la théorie de Poisson.

Dans le cas des corps mous, le théorème VII trouve son application immédiate; les points en contact ayant la même vitesse normale dans les deux corps après le choc, les travaux des deux percussions, tels qu'ils doivent être évalués dans cette proposition, sont égaux et de signes contraires. On voit donc que, dans ce cas, la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues. C'est le théorème bien connu de Carnot, théorème qui n'a d'ailleurs d'autre avantage

que de montrer qu'il y a perte de force vive, sans apprendre à en mesurer la grandeur.

Pour étudier le choc d'une manière plus complète et comprendre tous les cas, nous allons chercher les formules qui relient les vitesses w, w', à un instant quelconque du choc, à la percussion qui s'est produite jusqu'à cet instant, et, en faisant ensuite les hypothèses particulières, nous retrouverons tous les cas.

Désignons par μ, μ' les paramètres de la normale au point de choc par rapport aux corps (M), (M') respectivement. La percussion $\int N\,dt$ appliquée au corps (M) donnera au point de choc la vitesse normale :

$$w = w_0 + \frac{1}{\mu}\int N\,dt, \tag{20}$$

résultante de la vitesse initiale w_0 et de celle qu'imprimerait la percussion au corps partant du repos. De même la percussion $-\int N\,dt$ appliquée au corps (M') donnera au point de choc de ce corps la vitesse normale :

$$w' = w'_0 - \frac{1}{\mu'}\int N\,dt. \tag{21}$$

Les équations précédentes nous conduisent aux deux suivantes :

$$\mu w + \mu' w' = \mu w_0 + \mu' w'_0 \tag{22}$$

et

$$w - w' = w_0 - w'_0 + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\int N\,dt.$$

Introduisons les vitesses relatives :

$$W = w - w', \quad W_0 = w_0 - w'_0.$$

L'équation précédente s'écrira :

$$W - W_0 = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}\right)\int N\,dt. \tag{23}$$

Si nous substituons la valeur de $\int N\,dt$ dans la formule (18), nous

aurons :

$$(24) \qquad \Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2 = \frac{W^2 - W_0^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Quant à la variation de force vive pour chaque corps, elle sera donnée par les formules (17), qui deviennent :

$$\Sigma_M m (v^2 - v_0^2) = (w + w_0) \frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}},$$

$$\Sigma_{M'} m (v^2 - v_0^2) = -(w' + w_0') \frac{W - W_0}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

Ces formules ne diffèrent en rien de celles qui seraient relatives au choc de deux sphères de masses μ, μ'. Il est donc inutile de les discuter en détail. On obtiendra le choc des corps mous en faisant $W = 0$ et celui des corps élastiques en posant $W = - W_0$.

Cela nous conduit à dire un mot d'une hypothèse bien connue de Newton, relative aux corps imparfaitement élastiques. Newton admet que pour ces corps le choc sera terminé quand on aura :

$$W = - e W_0,$$

e étant une fraction positive qui dépend de la nature des deux corps. On voit que cette hypothèse comprend comme cas extrêmes celles qui répondent au choc des corps mous ($e = 0$) et au choc des corps parfaitement élastiques ($e = 1$). Il est aisé de reconnaître quelle sera la perte de force vive. Si nous nous reportons à la formule (24), nous trouvons pour l'expression de cette perte :

$$(1 - e^2) \frac{W^2}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}}.$$

On peut donc caractériser l'hypothèse de Newton en disant qu'*elle conduit à une perte de force vive qui est une fraction déterminée,* $(1 - e^2)$, *et toujours la même, de celle qui se produit dans le choc des corps mous.*

IV. — Du choc, en tenant compte du frottement.

Jusqu'ici j'ai négligé l'influence du frottement qui se produit au contact. Les expériences du général Morin paraissent établir que, même dans ce cas, le frottement suit les lois ordinaires. Toutefois, dans la théorie des machines, on n'a eu à s'occuper que de problèmes relativement simples, pour lesquels il est facile de reconnaître *à priori* que la vitesse relative au point de contact des deux corps a une composante tangentielle dont la direction demeure constante pendant toute la durée du choc. Il n'y a donc alors qu'à introduire, en même temps que les percussions normales appliquées aux deux corps, des percussions tangentielles égales à la valeur commune des percussions normales multipliée par le coefficient de frottement, et ayant une direction invariable pendant le choc, celle de la composante tangentielle de la vitesse relative au point de contact. Je citerai un travail de Poisson, *Sur le frottement des corps qui tournent* (*Bulletin de Férussac*, t. VI, p. 163) et les recherches de Coriolis sur le choc des sphères dans sa *Théorie mathématique des effets du jeu de billard.*

Si l'on se propose de traiter le problème général, la question devient beaucoup plus compliquée. On sait que, dans le cas où il n'y a pas frottement, la vitesse relative au point de contact passe progressivement, pendant la courte durée du choc, d'une valeur à une autre, tout à fait différente en grandeur et en direction; il en est de même quand il y a frottement, et si l'on veut tenir compte rigoureusement des effets de cette force, il faudra, à chaque nouvel instant du choc, donner au frottement une direction nouvelle en sens inverse de la vitesse relative à cet instant. Cette direction de la vitesse relative dépend, d'ailleurs, du frottement qui s'est produit aux époques antérieures du choc; on peut donc prévoir qu'il y aura une équation différentielle donnant la loi du phénomène et dont l'intégration constituera la principale difficulté du problème; et l'on reconnaît aussi que si l'on voulait, malgré le changement de la vitesse tangentielle relative au point de contact, conserver à ce frottement une direction constante, on pourrait commettre des erreurs du même ordre que les effets dont on veut tenir compte.

M. Phillips, dans un beau travail inséré au *Journal de Liouville* (t. XIV, 1[re] série, p. 312), a le premier abordé la question à ce point de vue et intégré l'équation différentielle qui se présente dans cette théorie. Depuis, dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXVIII, p. 1645), j'ai obtenu les mêmes résultats par une méthode différente et à quelques égards plus simple. En étudiant de nouveau cette question pour présenter une étude complète de la théorie du choc, je me suis aperçu que, si les recherches que je viens de citer suppriment la principale difficulté de la question, elles ne donnent pas cependant la solution complète du problème; car elles négligent ce fait capital que la vitesse relative tangentielle peut devenir nulle pendant la durée du choc. Nous avons repris l'étude de cette question dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, en ayant égard aux circonstances qui avaient été négligées dans les recherches antérieures.

Prenons pour axe des z la normale commune aux deux corps au point de contact, la partie positive de l'axe des z étant dirigée vers le corps (M). Les axes des x et des y seront dans le plan de contact. Le point de choc du corps (M) a, par rapport au point de choc du corps (M'), une vitesse relative dont nous désignerons par w la composante normale et par v la composante tangentielle. Si la vitesse v fait avec l'axe des x l'angle φ, les trois composantes de la vitesse relative suivant Ox, Oy, Oz seront :

$$v \cos \varphi, \quad v \sin \varphi, \quad w.$$

Désignons par N la force normale qui s'exerce à l'instant t sur le corps (M). La force de frottement aura, suivant Ox, Oy, les deux composantes :

$$-f\mathrm{N} \cos \varphi, \quad -f\mathrm{N} \sin \varphi,$$

f désignant le coefficient du frottement. Par suite, les trois composantes de la percussion reçue par le corps (M) depuis le commencement du choc seront :

$$-f\int_0^t \mathrm{N} \cos \varphi \, dt, \quad -f\int_0^t \mathrm{N} \sin \varphi \, dt, \quad \int_0^t \mathrm{N}\, dt,$$

et le corps (M') aura reçu dans le même temps des percussions égales et contraires. Cela posé, d'après les lois de l'effet des percussions, les composantes de la vitesse relative des deux corps seront des fonctions

linéaires de ces percussions, et l'on aura :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} v\cos\varphi &= v_0\cos\varphi_0 - af\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - bf\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c\int \mathrm{N}dt,\\ v\sin\varphi &= v_0\sin\varphi_0 - a'f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b'f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c'\int \mathrm{N}dt,\\ w &= w_0 \qquad - a''f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\,dt - b''f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\,dt + c''\int \mathrm{N}dt,\end{aligned}\right.$$

v_0, φ_0, w_0 désignant les valeurs initiales de v, φ, w. Quant à a, b, c, ..., ce sont des constantes que l'on détermine sans difficulté et qui dépendent de la forme et de la position relative des deux corps : a, a', a'' sont les composantes de la vitesse relative qui serait imprimée aux points en contact par deux percussions égales à l'unité dirigées suivant l'axe des x et appliquées l'une au corps (M), l'autre au corps (M'), la première ayant le sens de la partie positive de l'axe des x, l'autre ayant le sens contraire; b, b', b'', c, c', c'' ont des définitions analogues relativement à des percussions dirigées suivant Oy et Oz. Il n'y a donc aucune relation entre ces neuf constantes, qui, dans le cas des corps libres, dépendent de vingt paramètres. Il est vrai que les équations précédentes ne supposent nullement les corps libres et qu'elles ont lieu d'une manière absolue, quelle que soit la nature des liaisons. Mais, dans la discussion, nous pourrons les supposer quelconques; il nous suffira seulement de montrer que, dans tous les cas, elles satisfont à des inégalités, dont nous aurons à tenir grand compte dans notre discussion. Nous allons d'abord indiquer quelles sont ces relations d'inégalité.

Si deux corps (M), (M') sont en repos, et qu'en un de leurs points de contact on leur applique respectivement deux percussions P, — P égales et contraires, il est facile de montrer que la vitesse relative que prendra le point de contact de (M) par rapport au point de contact de (M') aura toujours une projection positive sur la percussion P appliquée au corps (M). En effet, nous savons que la percussion P imprime à son point d'application une vitesse dont la projection sur P est $\frac{\mathrm{P}}{\mu}$, μ étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M). De même la percussion — P imprime au point du corps (M') où elle est appliquée une vitesse dont la projection sur — P sera $+\frac{\mathrm{P}}{\mu'}$,

μ' étant le paramètre de la ligne d'action par rapport au corps (M'); et par conséquent la projection de cette vitesse sur P sera $-\frac{P}{\mu'}$. La projection de la vitesse relative sur P, étant la différence des projections des deux vitesses absolues, sera :

$$P\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}\right),$$

et, *par conséquent, sera toujours positive.*

D'après cela, revenons aux deux corps (M), (M') supposés au repos, et appliquons à l'origine au corps (M) une percussion quelconque dont les composantes sont X, Y, Z, en appliquant au corps (M') la percussion égale et contraire. La vitesse relative qui sera imprimée par ces deux percussions sera définie par les formules :

$$\begin{aligned} v_x &= a\,X + b\,Y + c\,Z, \\ v_y &= a'X + b'Y + c'Z, \\ v_z &= a''X + b''Y + c''Z, \end{aligned}$$

cette vitesse étant toujours celle du point de (M) par rapport au point de (M'). La projection de cette vitesse sur la percussion appliquée au corps (M) devant être positive, nous devrons avoir :

$$Xv_x + Yv_y + Zv_z > 0,$$

et par conséquent :

$$aX^2 + b'Y^2 + c''Z^2 + (c' + b'')\,YZ + (c + a'')\,XZ + (b + a')\,XY > 0.$$

Ainsi, les constantes a, b', c'' doivent satisfaire à toutes les inégalités qui expriment que l'expression précédente est positive, quelles que soient X, Y, Z. Par exemple, on aura :

$$(26)\qquad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \quad b' > 0, \quad c'' > 0, \\ (b + a')^2 - 4ab' < 0. \end{array} \right.$$

Nous aurons à faire usage de ces inégalités.

Après ces remarques préliminaires, reprenons les équations (25) et différentions-les. Si nous posons :

$$\begin{aligned} A &= c - a f \cos\varphi - b f \sin\varphi, \\ A' &= c' - a' f \cos\varphi - b' f \sin\varphi, \\ A'' &= c'' - a'' f \cos\varphi - b'' f \sin\varphi, \end{aligned}$$

nous aurons :

$$(27)\qquad \begin{cases} \cos\varphi\, dv - v\sin\varphi\, d\varphi = \mathrm{A}\mathrm{N}\, dt, \\ \sin\varphi\, dv + v\cos\varphi\, d\varphi = \mathrm{A}'\mathrm{N}\, dt, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\frac{dv}{v} = \frac{\mathrm{A}'\sin\varphi + \mathrm{A}\cos\varphi}{\mathrm{A}'\cos\varphi - \mathrm{A}\sin\varphi}\, d\varphi,$$

$$\mathrm{N}\, dt = \frac{v\, d\varphi}{\mathrm{A}'\cos\varphi - \mathrm{A}\sin\varphi}.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}'\sin\varphi + \mathrm{A}\cos\varphi,$$

$$\Delta = \mathrm{A}'\cos\varphi - \mathrm{A}\sin\varphi.$$

Nous obtiendrons :

$$(28)\qquad v = v_0 e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{H}}{\Delta} d\varphi},$$

et, v une fois connu, on déduira de l'expression de $\mathrm{N}dt$:

$$(29)\qquad \begin{cases} \int_0^t \mathrm{N}\, dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\, d\varphi}{\Delta}, & v\cos\varphi = v_0\cos\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{A}v\, d\varphi}{\Delta}, \\ \int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\, dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta}, & v\sin\varphi = v_0\sin\varphi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{A}'v\, d\varphi}{\Delta}, \\ \int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\, dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v\sin\varphi\, d\varphi}{\Delta}, & w = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{A}''v\, d\varphi}{\Delta}. \end{cases}$$

Ces quadratures donnent la solution complète de la question ; elles feront connaître les diverses circonstances du choc tant que la vitesse v ne deviendra pas nulle, auquel cas on ne connaîtrait plus la direction du frottement.

On peut interpréter géométriquement les formules précédentes. Construisons dans le plan tangent la courbe auxiliaire, lieu du point dont les coordonnées à l'instant t sont :

$$x = f\int_0^t \mathrm{N}\cos\varphi\, dt, \qquad y = f\int_0^t \mathrm{N}\sin\varphi\, dt.$$

On voit que le rayon vecteur de cette courbe représente en grandeur et en direction la percussion tangentielle. L'arc de la courbe, compté

à partir de l'origine, a pour valeur :

$$s = f\int_0^t \mathrm{N}\,dt,$$

et par conséquent il est égal à la percussion normale multipliée par le coefficient de frottement. Si l'on différentie d'ailleurs les formules qui donnent x et y, on trouvera :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi.$$

La direction de la tangente à cette courbe auxiliaire est donc la même que celle de la vitesse relative tangentielle à l'instant t. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Il existe une courbe située dans le plan de contact, passant au point de contact et donnant la loi du choc. Son rayon vecteur représente la percussion tangentielle due au frottement; sa tangente a la direction de la vitesse relative et son arc, compté à partir de l'origine, est égal au produit du coefficient de frottement par la percussion normale reçue par chacun des corps depuis le commencement du choc.

Il résulte des formules (25) que cette courbe satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0 \sin\varphi_0 - a'x - b'y + c's}{v_0 \cos\varphi_0 - ax - by + cs},$$

et par conséquent les recherches précédentes peuvent être considérées comme donnant l'intégrale de cette équation [1].

---

[1] Considérons d'une manière générale l'équation différentielle

$$(a) \qquad \frac{f(y') + \int \mathrm{F}(y')\,\mathrm{X}\,dx}{\varphi(y') + \int \Phi(y')\,\mathrm{X}\,dx} = \theta(y'),$$

où y' désigne $\frac{dy}{dx}$ et X une fonction de la seule variable x. Il est aisé de reconnaître qu'elle comprend, comme cas particulier, celle qui a été considérée dans le texte. Il suffit, en effet, pour retrouver cette dernière équation, de prendre :

$$\mathrm{X} = 1, \quad \theta(y') = y',$$
$$\mathrm{F}(y') = -a' - b'y' + c'\sqrt{1+y'^2}, \quad f(y') = v_0 \sin\varphi_0,$$
$$\Phi(y') = -a - by' + c\sqrt{1+y'^2}, \quad \varphi(y') = v_0 \cos\varphi_0.$$

Nous allons montrer qu'on peut intégrer très simplement l'équation (a). Pour cela,

Revenons aux formules (29) et voyons comment on déterminera la fin du choc. Dans le cas des corps mous, il n'y a pas de difficulté : le choc se terminera quand la vitesse relative normale w sera réduite à zéro. Mais il peut y avoir des corps élastiques dans lesquels le frottement n'est pas nul, par exemple deux billes d'ivoire dépoli. Dans ce cas, rien ne nous guidant, on peut revenir à l'ancienne hypothèse et supposer que, lorsque les corps se détendent après s'être

---

posons :

$$\varphi(y') + \int \varphi(y')\,X\,dx = \lambda,$$

et par conséquent :

$$f(y') + \int F(y')\,X\,dx = \lambda\theta(y');$$

on aura, en différentiant,

$$\frac{d\varphi}{dy'}dy' + \Phi(y')X\,dx = d\lambda,$$

$$\frac{df}{dy'}dy' + F(y')X\,dx = \theta(y')\,d\lambda + \lambda\frac{d\theta}{dy'}dy',$$

et, si l'on élimine $X\,dx$, on trouvera :

$$\frac{F(y')}{\Phi(y')} = \frac{\theta(y')\frac{d\lambda}{dy'} + \lambda\frac{d\theta}{dy'} - \frac{df}{dy'}}{\frac{d\lambda}{dy'} - \frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Cette équation linéaire fera connaître λ en fonction de y'. On déterminera ensuite x au moyen de la formule

$$X\,dx = \left(\frac{d\lambda}{dy'} - \frac{d\varphi}{dy'}\right)dy',$$

où les variables sont séparées, et enfin y par la formule

$$dy = y'\,dx.$$

L'intégration de l'équation différentielle est ainsi ramenée à une série de quadratures.

Si dans l'équation (a) on remplaçait $X\,dx$ par $d\varphi(x, y)$, on serait, par une méthode analogue, ramené à l'intégration de l'équation

$$\varphi(x, y) = F(y').$$

L'équation (a) comprend comme cas particulier les suivantes :

$$\frac{ax + by + cz + F(y')}{a'x + b'y + c'z + \Phi(y')} = \theta(y')$$

et

$$\frac{ax^2 + F(y') + c\int x\,dy}{a'x^2 + \Phi(y') + c'\int x\,dy} = \theta(y').$$

Cette dernière équation, correspondante au cas où l'on prend $X = x$, équivaut à une relation assez générale entre la tangente et l'aire d'un segment de la courbe cherchée.

comprimés, ils reçoivent une percussion normale égale à celle qui s'est développée dans la première partie du choc. Alors il suffira de calculer la percussion normale relative au cas du choc des corps mous et de prolonger le choc jusqu'à ce que la percussion normale ait pris une valeur double de celle que l'on a ainsi calculée. Pour plus de netteté, nous traiterons toujours, dans ce qui va suivre, le cas du choc des corps mous.

D'après les hypothèses faites sur le sens de l'axe des z, la percussion $\int N\,dt$ sera toujours positive et la valeur initiale w_0 de w sera négative. Par suite, la première des formules (29) nous montre que φ, partant de la valeur φ_0, devra varier de telle manière que $\frac{d\varphi}{\Delta}$ soit positif; donc on connaîtra le sens de la variation de φ. Désignons par α la première racine de l'équation

$$\Delta = 0,$$

que φ atteindrait en variant dans le sens indiqué, et cherchons si le choc sera terminé avant que φ ait atteint la valeur α. L'équation qui définit la fin du choc est :

$$(30) \qquad w = 0 = w_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{A''v\,d\varphi}{\Delta}.$$

Si cette équation admet une racine comprise entre zéro et α, il n'y aura pas de difficulté; les formules (25), (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc, et elles feront connaître les percussions tangentielles et normales, et par conséquent la vitesse finale des deux corps. Je dis que ce cas se présentera toujours toutes les fois que la quantité que nous avons désignée par H sera positive pour $\varphi = \alpha$.

En effet, nous avons vu que l'expression

$$X\,(aX + bY + cZ) + Y\,(a'X + b'Y + c'Z) + Z\,(a''X + b''Y + c''Z)$$

est toujours positive, quelles que soient les quantités X, Y, Z. Faisons :

$$X = -f\cos\varphi, \qquad Y = -f\sin\varphi, \qquad Z = 1;$$

on aura, en conservant les notations adoptées :

$$A'' - f\,(A'\cos\varphi + A''\sin\varphi) > 0,$$

ce qui, d'après les formules (25), équivaut à l'inégalité

$$dw - f\,dv > 0,$$

et, par conséquent,

(31) $$w - w_0 - f(v - v_0) > 0.$$

Or, si φ se rapproche de la racine α, $\frac{d\varphi}{\Delta}$ devient infini positif, puisque nous avons vu que le signe de $d\varphi$ est toujours celui de Δ. Si donc H est positif dans le voisinage de la valeur α de φ, l'intégrale $\int \frac{\mathrm{H}\,d\varphi}{\Delta}$ deviendra infinie positive, et il en sera de même de v, qui a pour valeur :

(32) $$v = v_0\, e^{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{H}\,d\varphi}{\Delta}}.$$

Ainsi, si φ variait de zéro à α, v et par conséquent $v - v_0$ croîtraient indéfiniment, et, en vertu de l'inégalité (31), il en serait de même de w. Donc, avant que φ ait atteint la valeur α, w aura pris tel accroissement positif que l'on voudra, et, comme sa valeur initiale est négative, elle aura passé par zéro ou par toute autre valeur positive qui marquera la fin du choc.

Si, au contraire, on a $\mathrm{H} < 0$ pour $\varphi = \alpha$, il pourra se faire sans doute qu'il y ait encore une valeur de φ comprise entre φ_0 et α et annulant w, mais il pourra aussi arriver que φ atteigne la valeur α sans que w soit devenue nulle. En effet, dans ce cas, *v deviendra nulle pour $\varphi = \alpha$* et l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{A}' v\, d\varphi}{\Delta},$$

qui tendra vers une valeur finie quand φ s'approchera de α, aura un maximum en valeur absolue. Si w_0, par exemple, est supérieure à ce maximum, l'équation (30) n'aura pas de racine entre φ_0 et α.

Voilà donc un cas tout aussi général que le précédent et qui avait été négligé, celui où la vitesse relative tangentielle devient nulle avant la fin du choc. Nous allons l'étudier d'une manière détaillée.

Et d'abord l'étude qui a été faite de questions analogues (roulement

des sphères, des cylindres) nous avertit qu'il peut se produire deux espèces tout à fait différentes de mouvements :

Ou bien la vitesse relative tangentielle continuera à demeurer nulle, et alors la force de frottement ne sera assujettie qu'à l'unique condition d'être inférieure à la force normale multipliée par le coefficient de frottement; en d'autres termes, la force appliquée à l'un des corps devra faire avec la normale commune un angle moindre que l'angle de frottement. Ce sont là les lois du frottement quand il y a *repos relatif* au contact.

Ou bien la vitesse relative tangentielle reprendra des valeurs finies, et il reste à déterminer le mouvement qui pourra se produire dans ces conditions.

Examinons d'abord le premier cas. Soient N la composante normale de la force à un instant quelconque, θ, θ_1 ses composantes tangentielles. Puisque la vitesse tangentielle v doit demeurer nulle, il faut que l'on ait :

$$a\theta + b\theta_1 + c\mathrm{N} = 0,$$
$$a'\theta + b'\theta_1 + c'\mathrm{N} = 0,$$

ce qui donne :

$$\theta = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}\mathrm{N}, \quad \theta_1 = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}\mathrm{N}.$$

Exprimons que la composante tangentielle est plus petite que $f\mathrm{N}$; nous aurons l'inégalité :

$$f^2\mathrm{N}^2 - \theta^2 - \theta_1^2 > 0,$$

et, par conséquent, en posant :

$$(33) \quad \mathrm{K} = f^2 (ab' - ba')^2 - (ac' - ca')^2 - (bc' - cb')^2,$$

il faudra que l'on ait :

$$\mathrm{K} > 0.$$

Si cette inégalité n'est pas satisfaite, le mouvement précédent sera impossible.

Examinons maintenant ce qui arrivera si l'on suppose que la vitesse tangentielle relative, après être devenue nulle, reprenne des valeurs

finies. Alors l'équation différentielle

$$(A' \cos\varphi - A \sin\varphi)\, dv = v\, (A' \sin\varphi + A \cos\varphi)\, d\varphi,$$

nous montre que la seule solution possible sera :

$$A' \cos\varphi - A \sin\varphi = 0, \qquad d\varphi = 0.$$

Ainsi, dans le mouvement qui se produira, la direction et le sens de la vitesse relative demeureront constants, et φ ne pourra être qu'une des racines de l'équation précédente.

Or cette équation admet quatre racines qui peuvent être toutes réelles. Nous sommes donc amenés à discuter jusqu'à cinq mouvements différents qui peuvent se produire : ceux, au nombre de quatre, qui correspondent à ces différentes racines, et celui pour lequel la vitesse tangentielle demeure nulle. Si deux de ces mouvements étaient possibles simultanément, on rencontrerait un fait très intéressant, mais qu'aucun des exemples traités et connus ne nous permet de prévoir. Nous allons en effet montrer, par une discussion détaillée, qu'il n'y a jamais indétermination, qu'il n'y a jamais à choisir entre deux ou plusieurs mouvements également possibles.

Nous développerons d'abord quelques remarques préliminaires.

1° Dans le cas où la vitesse tangentielle reprend une valeur finie, on a, nous l'avons vu, $\varphi =$ const., et les formules (27) nous donnent sans difficulté :

$$dv = HN\, dt, \qquad v = H\int N\, dt.$$

Or, v et $\int N\,dt$ sont positifs; il faut donc que H le soit aussi. Ainsi, pour que le mouvement correspondant à une racine α de l'équation $\Delta = 0$ soit possible, il faut que cette racine α rende la quantité H positive. Il suit de là que si la vitesse tangentielle est devenue nulle pour une certaine valeur α de φ, comme cette valeur α est une racine de Δ rendant H négative, la vitesse ne peut reprendre une valeur finie, φ étant égal à α.

2° Puisque le signe de H pour chaque racine de Δ a une grande importance, cherchons à le déterminer. A cet effet, nous remarquerons l'identité fondamentale dans cette discussion :

$$H + \Delta' = -af\sin^2\varphi - b'f\cos^2\varphi + (b + a')\, f \sin\varphi\cos\varphi.$$

Δ' désignant la dérivée de Δ par rapport à φ.

En vertu des inégalités (26), le second membre est toujours négatif. Donc H *est négative pour toute racine de* Δ *qui rend la dérivée* Δ' *positive ou nulle*. Telle est la proposition qui rendra possible la discussion suivante.

3° Formons l'équation qui donne les quatre valeurs de H; on a :

$$\Delta = A' \cos\varphi - A \sin\varphi = 0, \qquad A' \sin\varphi + A\cos\varphi = H,$$

et, par conséquent,

$$H = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{A'}{\sin\varphi},$$

ou, en développant,

$$c - (af + H)\cos\varphi - bf\sin\varphi = 0,$$
$$c' - a'f\cos\varphi - (b'f + H)\sin\varphi = 0,$$

ce qui donne, en éliminant φ,

$$\left(ca' - ac' - c'\frac{H}{f}\right)^2 + \left(cb' - bc' + \frac{cH}{f}\right)^2 = \left[(ab' - ba') + \frac{H}{f}(a + b') + \frac{H^2}{f^2}\right]f^2.$$

L'équation développée est :

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{H^4}{f^4} + 2(a + b')\frac{H^3}{f^3} \\ &+ [f^2(a + b')^2 + 2f^2(ab' - ba') - c^2 - c'^2]\frac{H^2}{f^2} \\ &+ 2[(a + b')(ab' - ba')f^2 - c(cb' - bc') + c'(ca' - ac')]\frac{H}{f} \\ &\qquad + f^2(ab' - ba')^2 - (ca' - ac')^2 - (cb' - bc')^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme de cette équation est la quantité que nous avons désignée par K.

Ces remarques faites, nous pouvons commencer la discussion.

1° Supposons d'abord que l'équation $\Delta = 0$ n'ait pas de racine réelle. Alors les quatre valeurs de H sont imaginaires et la quantité K est positive, puisqu'elle est le dernier terme de l'équation précédente, dont les quatre racines sont imaginaires. Si, au début du choc, la vitesse

tangentielle est nulle, elle demeurera nécessairement nulle, K étant positif et aucun des quatre autres mouvements n'étant réel. Si au contraire elle n'est pas nulle, elle ne le deviendra jamais, et les formules (29) seront applicables jusqu'à la fin du choc.

2° Si l'équation $\Delta = 0$ a deux racines réelles, pour une de ces racines la dérivée Δ' sera positive, et, par conséquent, la valeur correspondante de H sera négative. Si les deux valeurs réelles de H sont négatives, le dernier terme de l'équation (34) en H sera positif, et, par suite, si la vitesse v devient nulle à un instant du choc, elle ne pourra que le demeurer. Au contraire, si une seule valeur de H est négative, K sera aussi négatif; et, si la vitesse v devient nulle avant la fin du choc, elle ne pourra pas le rester; mais il se produira le mouvement dans lequel φ prend une valeur égale à la racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

3° Enfin, si l'équation $\Delta = 0$ a ses quatre racines réelles, il y en aura deux rendant Δ' positive, et, par conséquent, *deux au moins pour lesquelles on aura* $H < 0$.

Si l'on a $K < 0$, il y a un nombre impair de valeurs de H négatives; il y en a donc alors trois. Ainsi, il existe trois valeurs de φ pour lesquelles la vitesse v peut devenir nulle; mais, K étant négatif, cette vitesse ne pourra rester nulle, et il se produira le mouvement dans lequel φ prendra une valeur égale à l'unique racine de Δ pour laquelle on a $H > 0$.

Si l'on a $K > 0$, nous allons montrer que l'équation (34) n'a que des permanences, et par conséquent que les quatre valeurs de H sont négatives. Mais, pour simplifier le calcul, nous admettrons que l'on ait choisi les axes de telle manière que c' soit nulle. Cela revient à faire passer le plan des xz par la direction de la vitesse relative qui serait imprimée par les deux percussions égales et contraires, dirigées suivant Oz.

On a, dans le cas qui nous occupe :

$$f^2 (ab' - ba')^2 - c^2 (a'^2 + b'^2) > 0.$$

Rappelons les inégalités

$$(a' + b)^2 - 4ab' < 0, \quad a > 0, \quad b' > 0,$$

qui donnent :

$$(a' - b)^2 < 4 (ab' - ba'),$$

et par conséquent :

$$ab' - ba' > 0.$$

Si nous nous reportons à l'équation (34), nous voyons immédiatement que le coefficient de H^3 est positif. Il reste à démontrer qu'il en est de même des coefficients de H et de H^2. Nous emploierons pour cela les deux inégalités :

$$f^2 > \frac{c^2(a'^2 + b'^2)}{(ab' - ba')^2},$$

$$a > \frac{(a' + b)^2}{4b'}.$$

Le coefficient de $2\frac{H}{f}$ est :

$$L = (a + b')(ab' - ba')f^2 - c^2 b'.$$

Le coefficient de f^2 étant positif, remplaçons f^2 par sa limite inférieure. Nous aurons :

$$\frac{L(ab' - ba')}{c^2} > (a + b')(a'^2 + b'^2) - b'(ab' - ba'),$$

ou

$$\frac{L(ab' - ba')}{c^2} > aa'^2 + b'(a'^2 + b'^2) + bb'a'.$$

Remplaçons encore a par sa limite inférieure, et nous aurons :

$$\frac{4b' L(ab' - ba')}{c^2} > (a'^2 + ba' + 2b'^2)^2,$$

ce qui démontre que L est positif.

Passons au coefficient de $\frac{H^2}{f^2}$. On a, en le désignant par L_1 :

$$L_1 = f^2[(a + b')^2 + 2(ab' - ba')] - c^2$$

et, en remplaçant f^2 par sa limite inférieure :

$$\frac{L_1(ab' - ba')^2}{c^2} > (aa' + bb')^2$$
$$+ 4ab'(a'^2 + b'^2) + (a'^2 + b'^2)(b'^2 - b^2 - 2ba').$$

Si l'on remplace dans le second terme a par sa limite inférieure, on trouve :

$$\frac{L_1 (ab' - ba')^2}{c^2} > (aa' + bb')^2 + (a'^2 + b'^2)^2,$$

et, par conséquent, L_1 est encore positif.

Ainsi, toutes les fois que l'équation $\Delta = 0$ aura ses quatre racines réelles et que K sera positif, les quatre valeurs de H seront négatives. Alors, pour quatre valeurs de φ, la vitesse v pourra devenir nulle; mais, quand elle le sera devenue, elle restera nulle jusqu'à la fin du choc.

En résumé, *il n'y a jamais d'indétermination dans le mouvement.*

Dans le cas où la vitesse v demeurera nulle, il faudra substituer aux équations (29) les suivantes :

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= a\theta + b\theta_1 + cN, \\ 0 &= a'\theta + b'\theta_1 + c'N, \\ w &= w'_0 + a''\theta + b''\theta_1 + c''N, \end{aligned} \right.$$

qui serviront jusqu'à la fin du choc; w'_0 désigne la valeur qu'a w au moment où la vitesse v devient nulle.

J'indiquerai, en terminant, un exemple assez simple qui met en évidence la plupart des cas de la discussion précédente; c'est celui d'un corps solide de révolution qui vient rencontrer obliquement un plan fixe.

NOTE XXII

SUR LES RAPPORTS DE LA THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE AVEC CELLE DES SURFACES HOMOFOCALES.

On a vu, dans le texte, comment la détermination des axes et des moments principaux d'inertie relatifs à un point donné se rattache à la considération d'un système de surfaces homofocales du second degré. Les rapports entre la théorie des moments d'inertie et celle des surfaces homofocales du second degré sont nombreux et importants; depuis Dupin et Binet ils ont été l'objet de travaux variés, parmi lesquels il faut citer ceux de O. Hesse, exposés dans les *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes;* nous nous proposons d'indiquer ici la méthode que nous avons suivie, il y a déjà longtemps, dans notre enseignement de la Sorbonne et de l'École normale.

I

Cette méthode repose tout entière sur l'attribution d'un coefficient spécial, non seulement à chaque droite, mais à chaque point et à chaque plan de l'espace.

Nous appellerons moment d'inertie du corps par rapport à un point O la somme des produits des masses des molécules par le carré de leur distance au point O. Pour abréger, nous donnerons à ce moment d'inertie le nom de *paramètre* du point.

Le moment d'inertie par rapport à un plan (P) sera de même la somme des produits des masses des molécules par le carré de leur

distance au plan (P). Ce moment d'inertie recevra également le nom de *paramètre* du plan.

Enfin le moment d'inertie par rapport à une droite sera appelé *paramètre* de la droite.

Nous considérerons simultanément ces trois systèmes de paramètres.

Si le corps est rapporté à un système d'axes rectangulaires, le paramètre de l'origine sera :

$$\Sigma m\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

m désignant la masse d'un point matériel quelconque du corps et x, y, z ses coordonnées. Le paramètre de l'axe des z sera, avec les mêmes notations :

$$\Sigma m\,(x^2 + y^2).$$

Ceux des plans coordonnés des yz, des xz et des xy sont respectivement :

$$\Sigma m x^2, \quad \Sigma m y^2, \quad \Sigma m z^2.$$

De ces expressions si simples, relatives à un système arbitraire d'axes rectangulaires, résultent les théorèmes suivants :

Le paramètre d'un point quelconque est égal à la somme des paramètres de trois plans rectangulaires quelconques se coupant en ce point. Par conséquent, si un trièdre trirectangle se meut de telle manière que son sommet reste fixe, la somme des paramètres de ses trois faces demeure co stante.

Le paramètre d'une droite quelconque est égal à la somme des paramètres de deux plans rectangulaires quelconques se coupant suivant cette droite. Par conséquent si un dièdre droit tourne autour de son arête qui reste fixe, la somme des paramètres de ses deux faces demeurera constante.

Si on considère une droite et un plan perpendiculaires, le paramètre de leur point d'intersection est égal à la somme des paramètres de la droite et du plan. Par conséquent si un plan et une droite, assujettie à rester perpendiculaire au plan, tournent autour de leur point commun, la somme des paramètres de la droite et du plan reste constante.

Nous signalerons également les propositions suivantes dont la démonstration est très facile.

Le paramètre d'un point quelconque est égal au paramètre du centre de

gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux points.

Le paramètre d'un plan est égal au paramètre du plan parallèle mené par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse par le carré de la distance des deux plans.

Ces deux propositions sont analogues à celle qui a été donnée, relativement à la droite (p. 177) et qu'on peut énoncer comme il suit :

Le paramètre d'une droite est égal au paramètre de la droite parallèle menée par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse par le carré de la distance des deux droites.

II

Nous allons d'abord considérer tous les plans passant par une droite et nous étudierons comment varient leurs paramètres. Supposons que cette droite ait été prise pour axe des z. L'équation de l'un quelconque des plans qui la contiennent sera :

$$ux + vy = 0, \tag{1}$$

et le paramètre P de ce plan aura pour expression :

$$P = \Sigma m \frac{(ux + vy)^2}{u^2 + v^2} = \frac{au^2 + 2buv + cv^2}{u^2 + v^2}, \tag{2}$$

en posant pour abréger,

$$\Sigma mx^2 = a, \quad \Sigma mxy = b, \quad \Sigma my^2 = c. \tag{3}$$

Il résulte de la formule (2) qu'il y a en général deux plans correspondants à une valeur donnée, P_0, du paramètre. Si l'on suppose que l'on ait pris les plans bissecteurs de ces deux plans pour plans des xz et des yz, la constante b sera nulle, et la formule (2) prendra la forme :

$$P = \frac{au^2 + cv^2}{u^2 + v^2} = a \cos^2 i + c \sin^2 i, \tag{4}$$

i désignant l'angle du plan avec le plan des yz dont le paramètre est a. La formule (4) nous permet de reconnaître comment varient les paramètres des différents plans passant par la droite. Il est clair que l'

passera par toutes les va'eurs intermédiaires entre a et c et qu'il obtiendra une même valeur p pour les deux plans correspondants aux valeurs de i définies par l'équation

$$p = a\cos^2 i + c.\sin^2 i;$$

d'où l'on déduit :

$$\operatorname{tg} i = \pm\sqrt{\frac{p-a}{c-p}}.$$

Dans le cas exceptionnel où a sera égal à c, les paramètres de tous les plans passant par la droite seront les mêmes. En réunissant ces résultats nous obtenons le théorème suivant :

Si nous considérons tous les plans passant par une droite, deux plans de même paramètre admettent toujours les mêmes plans bissecteurs (P_0), (P_1). *Soient* p_0, p_1 *les paramètres de ces deux plans. Le paramètre d'un plan* (P) *faisant l'angle i avec* (P_0) *sera donné par la formule*

$$p = p_0\cos^2 i + p_1\sin^2 i, \tag{5}$$

et par conséquent lorsque i variera de 0 *à* π, *p passera deux fois par toutes les valeurs comprises entre* p_0 *et* p_1.

Imaginons maintenant que l'on considère les plans ou les droites assujettis seulement à passer par un point fixe O. Prenons pour axes coordonnés les axes principaux du point O et posons :

$$\Sigma mx^2 = \alpha, \quad \Sigma my^2 = \beta, \quad \Sigma mz^2 = \gamma.$$

On a vu que l'on a :

$$\Sigma myz = \Sigma mxz = \Sigma mxy = 0.$$

Le paramètre p d'un plan quelconque passant par O et représenté par l'équation

$$ux + vy + wz = 0,$$

sera donné par la formule :

$$p = \Sigma m\frac{(ux+vy+wz)^2}{u^2+v^2+w^2} = \frac{\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2}{u^2+v^2+w^2}. \tag{6}$$

Si i, i', i'' désignent les angles du plan avec les plans des yz, des xz

et des xy, la formule précédente peut encore s'écrire :

(7) $$p = \alpha \cos^2 i + \beta \cos^2 i' + \gamma \cos^2 i''.$$

Il résulte de l'équation (6) que tous les plans de paramètre donné p devront satisfaire à l'équation :

$$(\alpha - p) u^2 + (\beta - p) v^2 + (\gamma - p) w^2 = 0,$$

et par conséquent qu'ils envelopperont le cône :

(8) $$\frac{x^2}{\alpha - p} + \frac{y^2}{\beta - p} + \frac{z^2}{\gamma - p} = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Tous les plans de même paramètre passant par un point donné O *enveloppent un cône du second degré. Les cônes correspondants aux diverses valeurs du paramètre sont homofocaux.*

Considérons maintenant les droites passant par le point O. Si les équations

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w},$$

représentent une telle droite, son paramètre ϖ aura pour expression :

(9) $$\left\{ \begin{aligned} \varpi &= \Sigma m \frac{(wy - vz)^2 + (wx - uz)^2 + (vx - uy)^2}{u^2 + v^2 + w^2} \\ &= \frac{u^2 (\beta + \gamma) + v^2 (\alpha + \gamma) + w^2 (\alpha + \beta)}{u^2 + v^2 + w^2}, \end{aligned} \right.$$

et les droites de même paramètre ϖ engendreront un cône dont l'équation sera évidemment :

(10) $$(\beta + \gamma - \varpi) x^2 + (\alpha + \gamma - \varpi) y^2 + (\alpha + \beta - \varpi) z^2 = 0.$$

Les cônes correspondants aux différentes valeurs de ϖ seront homocycliques. Mais il est clair que l'on pourrait les obtenir d'une autre manière. Si l'on élève en effet des perpendiculaires en O à tous les plans de même paramètre passant en ce point O, il résulte de l'un des théorèmes énoncés à l'article I que toutes ces perpendiculaires auront le même paramètre. Par conséquent, tous les cônes représentés par l'équation (9) seront supplémentaires des cônes homofocaux repré-

sentés par l'équation (8). Les focales de ces derniers cônes seront, par suite, perpendiculaires aux plans cycliques des premiers. Ainsi :

Toutes les droites de même paramètre passant par un point engendrent un cône du second degré. Les cônes correspondants aux diverses valeurs du paramètre sont homocycliques et sont les supplémentaires des cônes homofocaux, enveloppes des plans de même paramètre.

En rapprochant les uns des autres les résultats donnés dans cet article, on retrouverait les principales propositions relatives aux cônes du second degré. Nous nous dispenserons de les développer, car nous les obtiendrons plus loin sous une forme plus générale. Nous discuterons cependant une question relative aux paramètres des plans passant par une droite quelconque.

Si l'on mène par cette droite deux plans de même paramètre, ils seront tangents à l'un des cônes homofocaux représentés par l'équation (8). Nous avons vu, au début de cet article, que leurs plans bissecteurs sont fixes et correspondent à ces valeurs du paramètre pour lesquels les deux plans de même paramètre viennent se confondre. Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

Si, par une droite fixe, on mène des plans tangents aux cônes homofocaux représentés par l'équation (8), *les plans bissecteurs de ces couples de plans tangents demeurent fixes; par conséquent, deux des cônes homofocaux passent par la droite, s'y coupent à angle droit; et de plus les paramètres de ces deux cônes donnent les limites extrêmes entre lesquelles varie le paramètre d'un plan passant par la droite.*

III

Étudions maintenant la loi de la variation des paramètres de tous les plans de l'espace. Si l'on rapporte le corps aux axes principaux du centre de gravité, on aura :

$$\Sigma myz = \Sigma mxz = \Sigma mxy = 0,$$
$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons que les unités aient été choisies de telle manière que la masse totale du corps soit égale à 1

et nous poserons :

$$\Sigma m x^2 = a, \quad \Sigma m y^2 = b, \quad \Sigma m z^2 = c.$$

Soit :

$$(11) \qquad ux + vy + wz + p = 0,$$

l'équation d'un plan quelconque. Le paramètre k de ce plan sera défini par l'équation :

$$(12) \quad k = \Sigma m \frac{(ux + vy + wz + p)^2}{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{au^2 + bv^2 + cw^2 + p^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Tous les plans de même paramètre k satisferont par suite à l'équation

$$(13) \qquad (k - a)\, u^2 + (k - b)\, v^2 + (k - c)\, w^2 = p^2,$$

et par conséquent ils envelopperont la surface dont l'équation en coordonnées ponctuelles est :

$$(14) \qquad \frac{x^2}{k - a} + \frac{y^2}{k - b} + \frac{z^2}{k - c} = 1.$$

La forme de cette équation donne immédiatement le théorème suivant :

Tous les plans de même paramètre enveloppent une surface du second degré, admettant pour centre unique le centre de gravité et pour axes les axes principaux du corps. Toutes les surfaces correspondantes aux diverses valeurs du paramètre sont homofocales.

Au moyen de ce théorème on peut résoudre très simplement la question examinée dans le texte (p. 185) et, étant donné un point quelconque M de l'espace, déterminer les axes principaux et les moments principaux relatifs à ce point.

Considérons en effet exclusivement des plans passant par M. Ceux qui sont de paramètre k sont tangents à la surface homofocale de même paramètre. Le théorème démontré à l'article II nous conduit donc à cette proposition fondamentale et bien connue que les cônes de même sommet, circonscrits à une série de surfaces homofocales, sont homofocaux. L'équation (8) de ces cônes montre de plus que trois d'entre eux se réduisent à des plans qui sont les plans principaux du point M, et cela pour les valeurs α, β, γ de k. Or le cône circonscrit

à une surface ne peut se réduire à un plan double que si la surface vient passer par son sommet. Nous voyons donc que trois des surfaces représentées par l'équation (14), correspondantes à des valeurs réelles de k, viendront passer par le point M, et que leurs trois plans tangents seront les plans principaux de ce point. Elles se couperont par conséquent à angle droit. On retrouve ainsi la propriété fondamentale des surfaces homofocales.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M. Les racines de l'équation

$$(15) \qquad \frac{x_0^2}{k-a} + \frac{y_0^2}{k-b} + \frac{z_0^2}{k-c} = 1,$$

seront les valeurs de α, β, γ. Si on les désigne par ρ, ρ_1, ρ_2 le plan tangent à la surface (ρ_i) aura ρ_i pour paramètre. Par conséquent les paramètres des trois axes principaux seront :

$\rho_1 + \rho_2$ pour la normale à la surface (ρ),
$\rho + \rho_2$ — (ρ_1),
$\rho + \rho_1$ — (ρ_2).

Ces résultats concordent, on le reconnaîtra aisément, avec ceux qui ont été donnés à la page 189.

Le paramètre du point M sera :

$$\rho + \rho_1 + \rho_2,$$

ou, en calculant la somme des racines de l'équation (15) :

$$a + b + c + x^2 + y^2 + z^2.$$

On voit que, conformément à une proposition de l'article I, le paramètre du point M est égal à celui du centre de gravité, augmenté du carré de la distance des deux points.

D'après l'expression que nous venons de donner du paramètre d'un point quelconque, nous voyons que le lieu des points de même paramètre sera une sphère ayant pour centre le centre de gravité du corps. D'après cela, considérons trois surfaces homofocales de paramètres k, k_1, k_2. Si un trièdre tri-rectangle a ses faces respectivement tangentes à ces trois surfaces, le paramètre de son sommet qui, d'après une proposition de l'article I, est égal à la somme des

paramètres des trois faces, sera constant et égal à

$$k + k_1 + k_2.$$

Par conséquent le lieu de ce sommet sera une sphère concentrique aux trois surfaces. Ce théorème est dû à M. Chasles qui l'a donné dans l'*Aperçu historique*. Si l'on suppose que les trois surfaces coïncident on retrouve le théorème de Monge, relatif au trièdre tri-rectangle circonscrit à une surface unique.

Considérons maintenant deux surfaces homofocales de paramètres k_0 et k_1, et menons-leur deux plans tangents parallèles. D'après une proposition donnée à l'article I, les paramètres de ces deux plans seront :

$$k_0 = k + d^2, \quad k_1 = k + d'^2,$$

k désignant le paramètre du plan parallèle mené par le centre de gravité et d, d' les distances du centre de gravité à ces deux plans. Comme on a :

$$k_1 - k_0 = d'^2 - d^2,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

La différence des carrés des distances du centre à deux plans tangents parallèles, menés à deux surfaces homofocales, est constante et égale à la différence des carrés des paramètres de ces surfaces.

Nous allons obtenir d'autres conséquences, d'une démonstration moins facile, en étudiant les rapports d'une ligne droite avec les surfaces homofocales.

Menons par cette droite deux plans tangents à l'une quelconque des surfaces homofocales. Ces plans auront le même paramètre et nous avons vu que leurs plans bissecteurs seront toujours les mêmes, quelle que soit la valeur du paramètre, c'est à dire quelle que soit la surface homofocale à laquelle ils sont tangents. Lorsque ces deux plans se confondront, ils devront coïncider avec l'un ou l'autre de leurs deux plans bissecteurs. Ils ne peuvent d'ailleurs se confondre que si la surface homofocale à laquelle ils sont tangents devient elle-même tangente à la droite. Cette remarque nous donne la proposition suivante :

Étant donnée une droite quelconque, il y a deux surfaces homofocales

réelles tangentes à la droite et les plans tangents à ces deux surfaces en leur point de contact avec la droite sont rectangulaires. Ces deux plans sont les plans bissecteurs du dièdre que l'on peut former en menant par la droite des plans tangents à toute autre surface du système homofocal.

Il résulte des développements donnés à l'article I que le théorème précédent ne peut se trouver en défaut que lorsque tous les plans passant par la droite ont le même paramètre. Alors tous ces plans sont tangents à une même surface homofocale, et par conséquent la droite est une génératrice rectiligne de cette surface.

Soit M un point de la droite. Rapportons-la aux trois axes principaux de ce point. Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des surfaces passant en M. L'équation du cône de sommet M circonscrit à la surface (k) sera :

$$\frac{x^2}{k-\rho}+\frac{y^2}{k-\rho_1}+\frac{z^2}{k-\rho_2}=0.$$

Soient i, i', i'' les angles que fait la droite avec les normales aux surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2) respectivement. L'équation en k :

$$\frac{\cos^2 i}{k-\rho}+\frac{\cos^2 i'}{k-\rho_1}+\frac{\cos^2 i''}{k-\rho^2}=0, \tag{16}$$

déterminera les deux cônes passant par la droite ; c'est à dire elle fera connaître les paramètres des deux surfaces homofocales tangentes à la droite. Si on désigne par k_0 et k_1 ces paramètres, on aura :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\cos^2 i}{k_0-\rho}+\frac{\cos^2 i'}{k_0-\rho_1}+\frac{\cos^2 i''}{k_0-\rho_2}=0,\\&\frac{\cos^2 i}{k_1-\rho}+\frac{\cos^2 i'}{k_1-\rho_1}+\frac{\cos^2 i''}{k_1-\rho_2}=0.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ces deux équations permettent de déterminer i, i', i''. On en déduit :

$$\left\{\begin{aligned}\cos^2 i&=\frac{(\rho-k_0)(\rho-k_1)}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)},\\\cos^2 i'&=\frac{(\rho_1-k_0)(\rho_1-k_1)}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)},\\\cos^2 i''&=\frac{(\rho_2-k_0)(\rho_2-k_1)}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

IV

On peut, en utilisant les formules précédentes, obtenir des résultats très importants, relativement aux droites pour lesquelles k_0 et k_1 ont la même valeur, c'est à dire qui sont tangentes à deux surfaces homofocales déterminées. Mais, pour cela, il est essentiel de rappeler quelques formules relatives au système de coordonnées elliptiques.

Reprenons l'équation :

$$(19) \qquad \frac{x^2}{k-a} + \frac{y^2}{k-b} + \frac{z^2}{k-c} - 1 = 0,$$

qui représente les surfaces enveloppes des plans de même paramètre. Nous avons vu qu'il en passe trois par un point quelconque de l'espace. C'est ce que montre d'ailleurs aisément la discussion de l'équation précédente où l'on considère x, y, z comme données et k comme une inconnue à déterminer. Si l'on suppose a, b, c rangés par ordre de grandeur décroissante, elle admet trois racines réelles; l'une que nous désignerons par ρ, supérieure à a; l'autre que nous appellerons ρ_1, comprise entre a et b; la troisième que nous désignerons par ρ_2, comprise entre b et c. Ces trois racines correspondent respectivement à un ellipsoïde, à un hyperboloïde à une nappe et à un hyperboloïde à deux nappes. Par suite, si l'on décompose le système des surfaces homofocales en trois familles composées, la première des ellipsoïdes, la seconde des hyperboloïdes à une nappe et la troisième des hyperboloïdes à deux nappes, nous pourrons dire qu'il passe une surface de chacune des trois familles par tout point de l'espace. C'est ce que montrerait d'ailleurs aisément la discussion des formes successives que prend la surface appartenant à une famille donnée, quand le paramètre qui la détermine prend toutes les valeurs possibles. Par exemple les ellipsoïdes (ρ) commencent à être confondus avec la portion du plan des yz comprise à l'intérieur de la focale elliptique réelle; ils grandissent ensuite indéfiniment et leurs trois axes dépassent toute grandeur donnée. Il passe donc un ellipsoïde et un seul par chaque point de l'espace.

Lorsqu'on emploie le système de coordonnées elliptiques, on substitue

aux coordonnées x, y, z d'un point les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 des trois surfaces homofocales qui passent par ce point. Il est vrai qu'à un système de valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2 correspondent les huit points d'intersection des trois surfaces homofocales correspondantes; mais ces points sont placés symétriquement par rapport aux trois plans principaux et des considérations très simples de continuité permettent, dans chaque question, de reconnaître le point auquel se rapportent les valeurs trouvées des cooordonnées elliptiques.

Si l'on se reporte à l'équation (19) en y regardant x, y, z comme les coordonnées d'un point quelconque et k comme un paramètre variable, elle admettra pour racines les coordonnées elliptiques ρ, ρ_1, ρ_2 du point considéré. On pourra donc écrire l'identité :

$$(20) \quad 1 - \frac{x^2}{k-a} - \frac{y^2}{k-b} - \frac{z^2}{k-c} = \frac{(k-\rho)(k-\rho_1)(k-\rho_2)}{(k-a)(k-b)(k-c)},$$

qui devra avoir lieu pour toutes les valeurs de k. En décomposant le second membre en fractions simples, on obtiendra les valeurs de x^2, y^2, z^2. On trouve ainsi :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)(a-\rho_2)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 &= \frac{(b-\rho)(b-\rho_1)(b-\rho_2)}{(b-a)(b-c)}, \\ z^2 &= \frac{(c-\rho)(c-\rho_1)(c-\rho_2)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on posait, pour abréger,

$$(22) \quad \begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c), \\ \varphi(x) &= (x-\rho)(x-\rho_1)(x-\rho_2), \end{aligned}$$

les valeurs de x, y, z pourraient s'écrire :

$$(23) \quad x^2 = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad y^2 = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad z^2 = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}.$$

Proposons-nous maintenant de trouver l'expression de la distance de deux points infiniment voisins dans le système des coordonnées

elliptiques. Les formules (21) nous donnent :

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{x}{2(\rho - a)}\,d\rho + \frac{x}{2(\rho_1 - a)}\,d\rho_1 + \frac{x}{2(\rho_2 - a)}\,d\rho_2,\\ dy &= \frac{y}{2(\rho - b)}\,d\rho + \frac{y}{2(\rho_1 - b)}\,d\rho_1 + \frac{y}{2(\rho_2 - b)}\,d\rho_2,\\ dz &= \frac{z}{2(\rho - c)}\,d\rho + \frac{z}{2(\rho_1 - c)}\,d\rho_1 + \frac{z}{2(\rho_2 - c)}\,d\rho_2. \end{aligned}\right.$$

On en déduit par un calcul facile :

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4}\,&\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{f(\rho)}\,d\rho^2 \\ &+ \frac{1}{4}\,\frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{1}{4}\,\frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2, \end{aligned}$$

ou encore :

$$(24)\qquad 4\,ds^2 = \frac{\varphi'(\rho)}{f(\rho)}\,d\rho^2 + \frac{\varphi'(\rho_1)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2 + \frac{\varphi'(\rho_2)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2.$$

La forme seule de cette expression montre immédiatement que les surfaces homofocales se coupent à angle droit. Les trois termes qui la composent sont les carrés des projections de l'élément ds sur les normales aux trois surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2) respectivement. Si donc on désigne, comme nous l'avons déjà fait, par i, i', i'' les angles de l'élément ds avec ces trois normales, on aura :

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} ds^2 \cos^2 i &= \frac{\varphi'(\rho)}{f(\rho)}\,d\rho^2 = \frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\quad d\rho^2}{(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)},\\ ds^2 \cos^2 i' &= \frac{\varphi'(\rho_1)}{f(\rho)}\,d\rho_1^2 = \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)\quad d\rho_1^2}{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)},\\ ds^2 \cos^2 i'' &= \frac{\varphi'(\rho_2)}{f(\rho_2)}\,d\rho_2^2 = \frac{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)\quad d\rho_2^2}{(\rho_2 - a)(\rho_2 - b)(\rho_2 - c)}. \end{aligned}\right.$$

Avant d'indiquer quelques applications de ces formules, examinons comment on déterminera la direction de la normale à une surface définie par une équation en coordonnées elliptiques.

Soit :

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'équation de cette surface en coordonnées cartésiennes; elle prendra

la forme :

$$(26) \qquad f(x, y, z) = \Theta(\rho, \rho_1, \rho_2),$$

si l'on introduit les coordonnées elliptiques. On aura en la différentiant :

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} d\rho + \frac{\partial\Theta}{\partial\rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial\Theta}{d\rho_2} d\rho_2 = 0,$$

ou, en se servant des formules (25) :

$$\cos i \frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\sqrt{\frac{f(\rho)}{\varphi'(\rho)}} + \cos i' \frac{\partial\Theta}{\partial\rho_1}\sqrt{\frac{f(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}} + \cos i'' \frac{\partial\Theta}{\partial\rho_2}\sqrt{\frac{f(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}} = 0.$$

Dans cette relation, i, i', i'' se rapportent à une tangente quelconque de la surface proposée. D'autre part cette équation exprime que la tangente est toujours perpendiculaire à la direction définie par les formules :

$$\frac{\cos j}{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\sqrt{\frac{f(\rho)}{\varphi'(\rho)}}} = \frac{\cos j'}{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_1}\sqrt{\frac{f(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}}} = \frac{\cos j''}{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_2}\sqrt{\frac{f(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}}}.$$

Donc j, j', j'' sont les angles que fait la normale à la surface (Θ) avec les normales aux trois surfaces homofocales (ρ), (ρ_1), (ρ_2). Si l'on pose, pour abréger,

$$(26)^a \quad \Delta(\Theta) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)^2 \frac{f(\rho)}{\varphi'(\rho)} + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_1}\right)^2 \frac{f(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_2}\right)^2 \frac{f(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)},$$

on aura :

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos j &= \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\sqrt{\frac{f(\rho)}{\varphi'(\rho)}}}{\sqrt{\Delta\Theta}}, \\ \cos j' &= \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_1}\sqrt{\frac{f(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)}}}{\sqrt{\Delta\Theta}}, \\ \cos j'' &= \frac{\frac{\partial\Theta}{\partial\rho_2}\sqrt{\frac{f(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)}}}{\sqrt{\Delta\Theta}}. \end{aligned} \right.$$

On peut obtenir les mêmes résultats par une autre méthode que nous allons faire connaître. En différentiant l'équation (26), on aura :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

et deux autres équations analogues en y, z. En remplaçant les dérivées de ρ, ρ_1, ρ_2 par leurs valeurs, que l'on trouvera facilement, et en faisant la somme des carrés, on obtient l'équation suivante :

$$(28) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \Delta \Theta,$$

Δ ayant la signification donnée par la formule $(26)^a$. En posant de même :

$$(29) \quad \Delta(\Theta, \Theta_1) = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho} \frac{f(\rho)}{\varphi'(\rho)} + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho_1} \frac{f(\rho_1)}{\varphi'(\rho_1)} + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho_2} \frac{f(\rho_2)}{\varphi'(\rho_2)},$$

on trouvera :

$$(30) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial z} = \Delta(\Theta, \Theta_1).$$

L'angle des deux surfaces représentées par les équations :

$$\Theta = C, \qquad \Theta_1 = C_1,$$

sera donc défini par la formule très simple :

$$(31) \qquad \cos V = \frac{\Delta(\Theta, \Theta_1)}{\sqrt{\Delta(\Theta)\,\Delta(\Theta_1)}}.$$

En supposant que l'une des surfaces, (Θ_1) par exemple, coïncide successivement avec les trois surfaces homofocales, on retrouve les résultats fournis par les formules (27).

Nous voyons que la condition d'orthogonalité de deux surfaces s'exprime, en coordonnées elliptiques, par la relation :

$$(32) \qquad \Delta(\Theta, \Theta_1) = 0.$$

Enfin si l'équation

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

représente une famille de surfaces parallèles et que la portion de l'une

des normales communes, comprise entre deux surfaces, soit égale à la différence des valeurs de la constante correspondantes à ces deux surfaces, on sait que l'on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

La même propriété s'exprimera en coordonnées elliptiques par la relation :

$$\Delta\theta = 1. \tag{33}$$

V

Après avoir rappelé ces formules générales, revenons à l'ensemble des droites qui sont tangentes à deux des surfaces homofocales (k_0), (k_1). Si l'on envisage une de ces droites, les cosinus des angles qu'elle fait, en un de ses points M, avec les normales aux surfaces homofocales qui passent en ce point sont donnés par les formules (18). Désignons par $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$ les différentielles des coordonnées elliptiques relatives à un déplacement sur la droite et remplaçons, dans les formules (18), i, i', i'' par leurs valeurs déduites des équations (25); nous aurons :

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho^2}{ds^2} &= \frac{f(\rho)(\rho - k_0)(\rho - k_1)}{(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2}, \\ \frac{d\rho_1^2}{ds^2} &= \frac{f(\rho_1)(\rho_1 - k_0)(\rho_1 - k_1)}{(\rho_1 - \rho)^2(\rho_1 - \rho_2)^2}, \\ \frac{d\rho_2^2}{ds^2} &= \frac{f(\rho_2)(\rho_2 - k_0)(\rho_2 - k_1)}{(\rho_2 - \rho)^2(\rho_2 - \rho_1)^2}. \end{aligned}\right.$$

En extrayant les racines carrées et posant :

$$F(\rho) = f(\rho)(\rho - k_0)(\rho - k_1), \tag{35}$$

on obtient trois équations auxquelles on peut donner la forme suivante :

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} &= 0, \\ \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \frac{\rho_1\, d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{\rho_2\, d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} &= 0, \\ \frac{\rho^2\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \frac{\rho_1^2\, d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{\rho_2^2\, d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} &= ds, \end{aligned}\right.$$

où les trois radicaux peuvent prendre d'ailleurs un signe quelconque. Ce sont, en coordonnées elliptiques, les équations d'une droite tangente aux deux surfaces (k_0), (k_1). La troisième, qu'on pourrait laisser de côté, donne le chemin parcouru sur cette droite.

Ces équations où les variables sont séparées peuvent évidemment être remplacées par les suivantes :

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}+\int\frac{d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}}+\int\frac{d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}}=C_0,\\ &\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}+\int\frac{\rho_1\,d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}}+\int\frac{\rho_2\,d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}}=C_1,\\ &\int\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}+\int\frac{\rho_1^2\,d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}}+\int\frac{\rho_2^2\,d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}}=C_2+s,\end{aligned}\right.$$

où C_0, C_1, C_2 désignent trois constantes arbitraires.

D'autre part nous savons qu'elles peuvent s'intégrer algébriquement, et nous pouvons même obtenir leur intégrale de la manière suivante. Considérons une droite tangente aux surfaces (k_0), (k_1). Les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points s'exprimeront en fonction de s par des relations de la forme :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} x&=s\cos\alpha+a_0,\\ y&=s\cos\beta+b_0,\\ z&=s\cos\gamma+c_0,\end{aligned}\right.$$

a_0, b_0, c_0, α, β, γ désignant des constantes qui satisferont à l'équation :

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

et à deux autres relations, que l'on obtiendrait en exprimant que la droite est tangente à chacune des surfaces (k_0), (k_1). On voit donc que les relations transcendantes (36) ou (37) peuvent être remplacées par des équations algébriques. Ce beau résultat généralise celui qui a été mis en pleine lumière par Euler et qui est relatif à l'addition des fonctions elliptiques; il est dû à Jacobi qui l'a déduit, en même temps que d'autres plus généraux, d'un théorème fondamental d'Abel.

M. Liouville a donné des propositions précédentes une démonstration très simple que nous allons développer; car elle nous fera

connaître plusieurs propositions qui ne résultent nullement de la méthode que nous avons suivie.

Considérons les surfaces représentées en coordonnées elliptiques par l'équation :

$$\Theta = \text{const.} = \int \sqrt{\frac{(\rho - k_0)(\rho - k_1)}{f(\rho)}}\, d\rho$$
$$+ \int \sqrt{\frac{(\rho_1 - k_0)(\rho_1 - k_1)}{f(\rho_1)}}\, d\rho_1 + \int \sqrt{\frac{(\rho_2 - k_0)(\rho_2 - k_1)}{f(\rho_2)}}\, d\rho_2.$$

On reconnaîtra aisément que Θ satisfait à l'équation :

$$\Delta\Theta = 1. \tag{39}$$

Par conséquent les surfaces $\Theta = \text{const.}$ sont parallèles et la distance de deux quelconques de ces surfaces, comptée sur l'une des normales communes, est égale à la différence des valeurs de Θ relatives à ces deux surfaces.

D'autre part, en différentiant l'équation (39) par rapport à k_0 et à k_1, on trouvera deux relations que l'on pourra écrire sous la forme abrégée :

$$\Delta\left(\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial k_0}\right) = 0,$$
$$\Delta\left(\Theta, \frac{\partial\Theta}{\partial k_1}\right) = 0.$$

On établira également, sans difficulté, l'équation :

$$\Delta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial k_0}, \frac{\partial\Theta}{\partial k_1}\right) = 0,$$

qui, jointe aux deux précédentes, nous montre que les trois équations

$$\Theta = C, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial k_0} = C_0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial k_1} = C_1, \tag{40}$$

définissent un système orthogonal. Or la première famille de ce système est composée de surfaces parallèles; par suite, les deux autres familles seront formées des surfaces développables qui coupent les surfaces de la première famille suivant leurs lignes de courbure. Par consé-

quent les deux équations :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial k_0} = C_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial k_1} = C_1, \tag{41}$$

représentent une droite normale aux surfaces (Θ).

Si nous les différentions et si nous les combinons linéairement, nous retrouverons les deux premières équations (36), et il est aisé de reconnaître, sur ces seules équations, que la droite sera tangente aux surfaces (k_0), (k_1). Supposons par exemple que la surface (k_0) soit un ellipsoïde. Quand on fera $\rho = k_0$ dans la première équation (36), on aura :

$$d\rho = 0.$$

La méthode de M. Liouville montre donc de la manière la plus élégante que les équations (41) représentent une droite tangente aux surfaces (k_0), (k_1). Mais elle établit de plus ce résultat très précieux que toutes les droites tangentes aux deux surfaces homofocales sont normales à une famille de surfaces parallèles, dont elle donne même l'équation en coordonnées elliptiques :

$$\Theta = \text{const.} \tag{42}$$

et elle fait connaître les surfaces développables formées par ces droites.

Pour établir avec précision les conséquences des calculs précédents, nous allons présenter quelques remarques géométriques très simples, relatives aux droites qui sont tangentes à deux surfaces quelconques (Σ_1), (Σ_2). Ces droites forment un ensemble auquel on a donné le nom de *congruence* (1). Il en passe un nombre limité en général par chaque point de l'espace ; ce nombre est appelé l'*ordre* de la congruence. Il y en a de même un nombre limité dans un plan quelconque ; ce nombre a reçu le nom de *classe*. Dans le cas particulier, que nous avons en

(1) Il est bon de remarquer qu'une congruence ne se compose pas nécessairement de toutes les tangentes communes à deux surfaces. De même que la courbe d'intersection de deux surfaces peut se décomposer en plusieurs autres, qu'il y a intérêt à étudier successivement, l'ensemble des tangentes communes à deux surfaces peut former plusieurs congruences distinctes, jouissant de propriétés différentes, qui pourront être définies d'une manière indépendante. Si l'on considère, par exemple, les normales d'une surface (S), elles seront tangentes aux deux nappes de la surface des centres de courbure ; mais ces deux nappes admettront en général d'autres tangentes communes qui formeront une ou plusieurs congruences, distinctes de la congruence des normales,

vue, des droites tangentes à deux surfaces du second degré, l'ordre et la classe sont égaux à 4.

Une surface réglée formée exclusivement de droites de la congruence est en général tangente aux surfaces (Σ_1), (Σ_2). Soit en effet (d) une droite de cette surface et soient m_1, m_2 les points de contact de cette droite avec les deux surfaces. Ces points m_1, m_2 décrivent respectivement deux courbes (C_1), (C_2), tracées sur les surfaces (Σ_1), (Σ_2). Supposons qu'aucune de ces courbes ne soit tangente aux positions successives de (d). La surface réglée engendrée par la droite (d) sera évidemment tangente à la surface (Σ_1) en tous les points de (C_1) et à la surface (Σ_2) en tous les points de (C_2). Elle ne sera d'ailleurs développable que si les plans tangents à (Σ_1) et à (Σ_2) en m_1 et en m_2 coïncident. Dans ce cas la droite (d) engendrera la développable circonscrite aux deux surfaces. Il suit de là qu'en laissant de côté cette développable particulière, il faut, pour que la droite (d) engendre une développable, qu'elle soit constamment tangente à une courbe tracée sur l'une ou l'autre des surfaces (Σ_1), (Σ_2).

Considérons par exemple la surface (Σ_1). En chaque point m_1 de cette surface passent un nombre limité de droites de la congruence, tangentes en ce point à (Σ_1) et en un autre point à (Σ_2). Si nous considérons les courbes de (Σ_1) qui sont tangentes en chacun de leurs points à une de ces droites, courbes dont la détermination dépend de l'intégration d'une équation différentielle, elles seront les arêtes de rebroussement d'une développable dont toutes les génératrices feront partie de la congruence. Ainsi :

On peut assembler les droites de la congruence suivant deux systèmes de développables : Les unes ont leurs arêtes de rebroussement sur (Σ_1) *et sont tangentes à* (Σ_2); *les autres sont tangentes à* (Σ_1) *et ont leurs arêtes de rebroussement sur* (Σ_2). *Chaque droite de la congruence appartient à une développable du premier système et à une développable du second.*

Dans le cas où les droites de la congruence sont les normales d'une surface (S), les surfaces (Σ_1), (Σ_2) sont les deux nappes de la surface des centres et les développables des deux systèmes se coupent à angle droit. Si donc on regardait les deux nappes (Σ_1), (Σ_2) dans la direction d'une normale à la surface (S), elles paraîtraient se couper à angle droit. La réciproque de cette proposition a été établie par M. Bertrand : *Toutes les fois que les deux systèmes de développables dans lesquels on peut*

distribuer les droites d'une congruence se coupent à angle droit, les droites sont normales à une famille de surfaces parallèles.

Appliquons ici cette remarque et soit (d) une droite de la congruence, tangente en m_1, m_2 respectivement aux surfaces (Σ_1), (Σ_2). Les deux développables de la congruence qui contiendront la droite (d), auront pour plans tangents; l'une, celle qui a son arête de rebroussement sur (Σ_2), le plan tangent en m_1 à (Σ_1); l'autre, le plan tangent en m_2 à (Σ_2). Pour qu'elles se coupent à angle droit, il sera nécessaire et suffisant que les plans tangents en m_1 et en m_2 soient rectangulaires.

Nous avons vu que cette condition est satisfaite dans le cas de deux surfaces homofocales du second degré. Nous retrouvons ainsi la proposition de M. Liouville :

Les droites tangentes à deux surfaces homofocales sont les normales d'une famille de surfaces parallèles; en d'autres termes, *deux surfaces homofocales peuvent toujours être considérées comme formant les deux nappes de la surface des centres de courbure d'une troisième surface.*

Revenons au cas général et considérons l'une des développables dont fait partie la droite (d), par exemple celle qui est tangente en m_2 et dont l'arête de rebroussement (C_1) est sur (Σ_1). Le plan osculateur en m_1 à cette arête de rebroussement est le plan tangent de la développable, c'est à dire le plan tangent en m_2 à (Σ_2); il est donc perpendiculaire au plan tangent en m_1 à (Σ_1). Par suite la courbe (C_1), ayant en chaque point son plan osculateur normal au plan tangent, sera une ligne géodésique de (Σ_1). La même conclusion s'appliquerait à (Σ_2). On voit donc que *les arêtes de rebroussement des développables sont lignes géodésiques de celle des surfaces* (Σ_1), (Σ_2), *sur lesquelles elles sont tracées.*

Ce résultat appliqué à deux surfaces homofocales montre immédiatement que l'on aurait pu obtenir par la géométrie l'intégrale première de l'équation des lignes géodésiques. Proposons-nous en effet, étant donnée une surface du second degré (S), de trouver la ligne géodésique parfaitement déterminée qui, passant en un point m de la surface, y admet une tangente donnée $m\mu$. Construisons la surface (S′) homofocale à (S), tangente à $m\mu$ et considérons la congruence formée par les tangentes communes à (S) et à (S′). Nous savons que les développables de cette congruence auront pour arêtes de rebroussement des lignes géodésiques tracées soit sur (S), soit sur (S′). Donc les courbes de (S) dont les tangentes seront également

tangentes à (S′), seront des lignes géodésiques, et parmi elles doit se trouver évidemment celle que nous cherchons. Ainsi :

Les tangentes en tous les points d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré (S) *sont tangentes à une autre surface homofocale* (S′).

Cette proposition conduirait à l'intégrale première que nous avons donnée dans le tome I. Mais pour obtenir l'intégrale finie, il faut employer les coordonnées elliptiques. On peut suivre d'ailleurs deux méthodes différentes.

Prenons les équations (36) d'une ligne droite et écrivons-les comme il suit :

$$\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \frac{d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} = 0,$$

$$\frac{(\rho - k_0)\, d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} + \frac{(\rho_1 - k_0)\, d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{(\rho_2 - k_0)\, d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} = 0.$$

La droite étant tangente aux surfaces (k_0), (k_1), déterminons sa direction au point où elle touche la surface (k_0), que nous supposerons être un ellipsoïde. Si nous faisons $\rho = k_0$ dans les deux équations précédentes, elles deviennent :

$$d\rho = 0,$$

$$\frac{(\rho_1 - k_0)\, d\rho_1}{\sqrt{F(\rho_1)}} + \frac{(\rho_2 - k_0)\, d\rho_2}{\sqrt{F(\rho_2)}} = 0.$$

La première exprime que la droite est tangente à la surface; la seconde est l'équation différentielle des courbes de l'ellipsoïde (k_0), tangentes à la droite dans ses diverses positions, c'est à dire des lignes géodésiques de cet ellipsoïde. Comme les variables y sont séparées, on aura en intégrant :

$$\int \sqrt{\frac{\rho_1 - k_0}{(\rho_1 - k_1) f(\rho_1)}}\, d\rho_1 + \int \sqrt{\frac{\rho_2 - k_0}{(\rho_2 - k_1) f(\rho_2)}}\, d\rho_2 = C.$$

C'est l'équation en termes finis de la ligne géodésique avec les deux constantes k_1 et C.

On obtiendrait le même résultat en donnant à ρ la valeur constante k_0

dans l'équation de M. Liouville :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial k_1} = C_1.$$

En effet cette équation représente une développable formée par les tangentes communes aux surfaces (k_0), (k_1). On s'assure aisément qu'elle est tangente à la surface (k_1). Donc son arête de rebroussement est sur la surface (k_0) et elle est, comme on l'a vu, une des lignes géodésiques de cette surface dont toutes les tangentes sont tangentes à la surface (k_1).

A la vérité, la propriété de l'arête de rebroussement d'être géodésique résulte exclusivement des considérations géométriques que nous venons de développer. Mais la méthode de M. Liouville permettrait d'obtenir une démonstration directe. Posons en effet :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial k_0} = \frac{1}{2}\Theta_0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial k_1} = \frac{1}{2}\Theta_1.$$

Les valeurs de Θ, Θ_0, Θ_1 données plus haut nous permettent d'exprimer $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$ et par conséquent ds en fonction de $d\Theta$, $d\Theta_0$, $d\Theta_1$. On trouve ainsi :

$$(43) \quad ds^2 = d\Theta^2 + \frac{(k_0-\rho)(k_0-\rho_1)(k_0-\rho_2)}{(k_0-k_1)}d\Theta_0^2 + \frac{(k_1-\rho)(k_1-\rho_1)(k_1-\rho_2)}{(k_1-k_0)}d\Theta_1^2.$$

Si l'on fait $\rho = k_0$, on a l'élément linéaire de la surface (k_0) sous la forme :

$$ds^2 = d\Theta^2 + (k_1-\rho_1)(k_1-\rho_2)\,d\Theta_1^2.$$

Un théorème bien connu de Gauss montre immédiatement que les lignes

$$\Theta_1 = \text{const.}$$

sont des géodésiques de cette surface.

VI

En partant des relations établies entre la théorie des moments d'inertie et celle des surfaces homofocales, on peut démontrer les

relations métriques les plus importantes relatives aux surfaces homofocales et en particulier celles qui servent de base aux beaux Mémoires de M. Chasles sur les lignes géodésiques et sur l'attraction des ellipsoïdes. Nous nous contenterons ici de donner quelques indications sur l'assemblage ou *complexe* des droites pour lesquelles le paramètre a une valeur donnée.

Nous allons d'abord indiquer une définition géométrique de ce complexe. Soit (d) une droite de paramètre k et soient k_0, k_1 les paramètres des deux surfaces homofocales tangentes à la droite. Les plans tangents (p_0), (p_1) aux points de contact m_0, m_1 de ces deux surfaces seront rectangulaires et par conséquent le paramètre de la droite sera égal à la somme de leurs paramètres. On aura donc :

$$k = k_0 + k_1.$$

D'autre part les plans bissecteurs des plans (p_0) et (p_1) étant également inclinés sur ces deux plans, auront le même paramètre, et comme ils sont d'ailleurs rectangulaires, la somme de leurs paramètres devra être encore égale à k. Le paramètre de ces deux plans sera donc égal à $\frac{k}{2}$. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Le complexe des droites de même paramètre k est formé par les intersections de deux plans tangents rectangulaires quelconques à la surface de paramètre $\frac{k}{2}$.

Remarquons d'ailleurs qu'on peut généraliser cette définition géométrique.

Si l'on mène à deux surfaces homofocales fixes quelconques de paramètres k_0, k_1 deux plans tangents rectangulaires, les intersections de ces plans engendrent le complexe formé par les droites de paramètre $k_0 + k_1$.

Nous allons indiquer les propriétés les plus simples du complexe précédent.

D'abord, *toutes celles de ses droites qui passent par un point* M *de l'espace y engendrent un cône, ayant ses plans cycliques perpendiculaires aux deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde homofocal qui passe en* M.

Nous avons en effet obtenu, à l'article II, l'équation de ce cône. Si l'on désigne par ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres des surfaces passant en M et si on les rapporte aux normales à ces trois surfaces, cette équation

prendra la forme :

$$(44)\quad (\rho_1 + \rho_2 - k)\, x^2 + (\rho + \rho_2 - k)\, y^2 + (\rho + \rho_1 - k)\, z^2 = 0.$$

Étudions de même les droites du complexe qui se trouvent dans un plan (P). Soit h le paramètre de ce plan. Si par une des droites du complexe située dans le plan, on mène un plan (P′) perpendiculaire à (P), le paramètre de (P′) sera évidemment $k - h$ et sera par conséquent constant. Par suite les plans (P′) seront tous tangents à la surface homofocale de paramètre $k - h$ et *les droites du complexe situées dans le plan* (P) *envelopperont une conique, qui sera la trace sur le plan* (P) *du cylindre perpendiculaire à ce plan, circonscrit à la surface de paramètre* $k - h$.

Il resterait à étudier la surface des singularités du complexe, c'est à dire le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se décompose en deux plans et l'enveloppe des plans pour lesquels la conique du complexe se décompose en deux points. Cette surface des singularités est une surface des ondes. Cette propriété, que j'avais communiquée à Painvin, est devenue, pour cet excellent et regretté géomètre, le point de départ de belles études qu'on pourra lire dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1re série, t. II) et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. XI).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

DYNAMIQUE

DU POINT MATÉRIEL

(Suite)

CHAPITRE XI

ATTRACTION.

Pages.

CHAPITRE XII

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DU POTENTIEL.

CHAPITRE XIII

CALCUL DU MOUVEMENT DES PLANÈTES ET DES COMÈTES AUTOUR DU SOLEIL.

CHAPITRE XIV

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE DONNÉE.

CHAPITRE XV

APPLICATION AU MOUVEMENT DU PENDULE CONIQUE.

CHAPITRE XVI

THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS.

QUATRIÈME PARTIE

DYNAMIQUE
DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

CHAPITRE II

APPLICATION DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

CHAPITRE III

THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT DE ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE.

CHAPITRE V

ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.
MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE.

CHAPITRE VI

FORCES INSTANTANÉES. — SUR LES PERCUSSIONS ET LE CHOC DES CORPS.

CHAPITRE VII

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

CHAPITRE VIII

PRINCIPE DE D'ALEMBERT.

CHAPITRE IX

ÉQUATIONS DE LAGRANGE. — ÉQUATIONS CANONIQUES.

CINQUIÈME PARTIE

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE II

HYDRODYNAMIQUE.

NOTES

DE Mr DARBOUX

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

